Matemáticas Financieras

Teoría fundamental para la oposición

Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria (590) · Economía

Introducción · Planificación de los temas 55 y 56 · Los modelos con sus supuestos, desarrollo y conclusiones · Capitalización, rentas, préstamos, empréstitos, valoración de activos, renta fija y carteras

Complementa al *Formulario Ecorami 2.0* y al Bloque 3 de ejercicios

preparación @ecorami

Academia Montero Espinosa

Índice

1 Introducción 2

2 Planificación de los temas 2

3 Leyes financieras y equivalencia de capitales 3

4 Rentas financieras 3

5 Préstamos 4

6 Empréstitos, usufructo y nuda propiedad 5

7 Valoración de activos financieros 6

8 Renta fija 6

9 Teoría de carteras y CAPM 7

10 Síntesis 7

1. Introducción

> *«El interés compuesto es la fuerza más poderosa del universo.»*
> — Atribuida habitualmente a Albert Einstein, sin fuente documental verificable. Conviene citarla como tal: es un lugar común, no una cita comprobada.

La frase es apócrifa, y precisamente por eso es un buen comienzo: las matemáticas financieras son la disciplina que sustituye las intuiciones sobre el dinero por reglas exactas. Su única idea es que un euro de hoy y un euro de mañana son bienes distintos, y que el tipo de interés es el precio relativo entre ambos. Todo lo demás —rentas, préstamos, empréstitos, bonos, acciones— son aplicaciones de esa idea a sucesiones de capitales con una forma concreta. En la oposición estos contenidos ocupan los temas 55 (capitalización, equivalencia financiera, rentas) y 56 (préstamos, empréstitos, usufructo y nuda propiedad), pero reaparecen en la parte práctica de forma constante: un préstamo francés con cuadro de amortización, un plan de ahorro, la valoración de una acción con Gordon y CAPM (los tres, Madrid 2023).

Este documento reúne la **teoría fundamental** con la estructura que el tribunal espera: **supuestos**, **desarrollo** y **conclusiones**. El *Formulario Ecorami 2.0* recoge las fórmulas con ejemplos y trampas; el Bloque 3 de ejercicios, su aplicación.



La intuición

Un consejo de método. En matemáticas financieras hay una sola operación, mover capitales en el tiempo*, y dos direcciones: capitalizar (hacia delante, multiplicando por* $(1+i)^t$*) y descontar (hacia atrás, dividiendo). Cualquier problema se resuelve dibujando el eje temporal, colocando los capitales, eligiendo un punto de referencia y escribiendo la ecuación de equivalencia: lo que entra vale lo mismo que lo que sale. Las fórmulas de rentas y préstamos son atajos para no sumar término a término, pero si las olvidas, la ecuación de equivalencia siempre te saca.*

2. Planificación de los temas

Tema	Título (resumido)	Modelo de esta guía	Formulario / ejercicios
55	Sistemas de capitalización, equivalencia financiera, rentas	§3 capitalización, §4 rentas	F capitalización y rentas; Ej. 5 (Madrid 2023), 15
56	Préstamos, empréstitos, usufructo y nuda propiedad	§5 préstamos, §6 empréstitos	F préstamos y empréstitos; Ej. 1–4 (Madrid 2023), 13, 14
53	Coste del capital	§7 valoración (CAPM)	F Gordon y CAPM; Ej. 6 (Madrid 2023), 12
49–50	Inversión y riesgo	§8 renta fija, §9 carteras	F bonos y carteras; Ej. 7–11

■ Secuencia de estudio recomendada (tres semanas)

1. **Semana 1 · Capitales y rentas.** Leyes financieras, tantos equivalentes y TAE, rentas constantes y variables. Objetivo: plantear cualquier plan de ahorro con la ecuación de equivalencia (Madrid 2023, ejercicio 5).
2. **Semana 2 · Préstamos y empréstitos.** Francés, americano, italiano, carencia, coste efectivo; empréstitos. Objetivo: el cuadro de amortización completo en diez minutos y el capital vivo en cualquier fecha (Madrid 2023, ejercicio 4).
3. **Semana 3 · Valoración.** Gordon y CAPM, bonos y duración, carteras. Objetivo: valorar una acción y un bono y explicar qué riesgo remunera cada tasa.

3. Leyes financieras y equivalencia de capitales

Capitalización simple y compuesta; tantos equivalentes (tema 55)

■ Supuestos

(1) Un capital se define por su cuantía y su vencimiento, (C, t); capitales con distinto vencimiento solo son comparables tras aplicarles una ley financiera. (2) La ley es creciente con el tiempo (preferencia por la liquidez) y, en la compuesta, los intereses se acumulan al capital en cada periodo. (3) El tipo de interés es constante y conocido.

■ Desarrollo

Simple: $C_n = C_0(1 + i\,n)$; los intereses se calculan siempre sobre C_0 y la ley es lineal. Compuesta: $C_n = C_0(1 + i)^n$; la ley es exponencial. A menos de un año la simple da más que la compuesta; a más de un año, menos; coinciden en $n = 1$. El descuento es la operación inversa: comercial ($D = N\,d\,t$, sobre el nominal) y racional (sobre el efectivo). Dos tantos son **equivalentes** si producen el mismo capital final en el mismo tiempo:

$$(1+i) = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m \quad \Longrightarrow \quad TAE = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1, \qquad i_m = (1+i)^{1/m} - 1$$

La **equivalencia financiera** de dos conjuntos de capitales exige que sus valores coincidan en una misma fecha; en compuesta, si son equivalentes en una fecha lo son en todas (no así en simple).

■ Conclusiones

El tipo nominal es una convención para enunciar; el efectivo es el que mide el coste real. La TAE legal añade comisiones y se obtiene como la TIR de los flujos reales. Toda la asignatura descansa en la ecuación de equivalencia: elegir una fecha focal y escribir «lo que entra = lo que sale».

4. Rentas financieras

Rentas constantes, variables, prepagables, diferidas y perpetuas (tema 55)

■ Supuestos

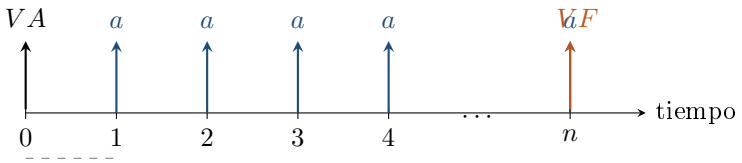
Una renta es una sucesión de capitales a intervalos regulares. Se clasifica por su cuantía (constante, variable en progresión geométrica o aritmética), por el momento del pago (pospagable al final del periodo, prepagable al principio), por su duración (temporal, perpetua) y por el origen de la valoración (inmediata, diferida d periodos, anticipada). El tipo i es el del periodo de la renta.

■ Desarrollo

El valor actual de una renta constante pospagable es la suma de una progresión geométrica de razón $(1+i)^{-1}$:

$$VA = a\,a_{\overline{n}|i} = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \qquad VF = a\,s_{\overline{n}|i} = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = VA\,(1+i)^n$$

Prepagable: multiplica por $(1+i)$. Diferida d periodos: multiplica el valor actual por $(1+i)^{-d}$. Perpetua: $VA = a/i$. Geométrica de razón $1+g$: $VA = a_1\,\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}$ (perpetua $a_1/(i-g)$ si $i > g$). Fraccionadas: usa el tipo efectivo del subperiodo.



pospagable: VA un periodo antes del 1.er pago

Cómo leerlo: cada término se descuenta al origen (o se capitaliza al final). Las variantes solo cambian dónde está el primer pago respecto al punto de valoración: prepagable, el mismo periodo; diferida, d periodos más tarde.

■ Conclusiones

Las rentas son el lenguaje de los préstamos (cuotas), de los planes de pensiones (valor final), de los alquileres y de la valoración de acciones (Gordon es una perpetua geométrica). El error típico es de fecha, no de fórmula: localiza siempre el primer pago y el punto de valoración.

Para el examen

Madrid 2023 (Estabilización, ejercicio 3) pidió un plan de ahorro con aportaciones y disposiciones: la clave es la ecuación de equivalencia en una fecha focal, no recordar una fórmula para cada caso. Dibuja el eje, coloca cada capital y escribe «valor de las aportaciones = valor de las disposiciones»; después usa los factores $a_{\overline{n}|i}$ y $s_{\overline{n}|i}$ para abreviar.

5. Préstamos

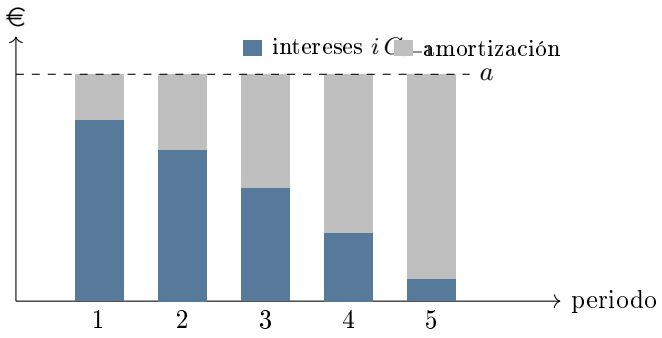
Sistemas de amortización: francés, americano, italiano; carencia (tema 56)

■ Supuestos

Un préstamo es la entrega de C_0 a cambio de una renta de términos amortizativos a_t que devuelven el principal y pagan intereses sobre el capital vivo. La equivalencia financiera exige $C_0 = \sum a_t(1+i)^{-t}$. Cada término se descompone en intereses ($I_t = i\,C_{t-1}$) y cuota de amortización ($A_t = a_t - I_t$), con $\sum A_t = C_0$.

■ Desarrollo

Francés (término constante): $a = C_0 \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$; los intereses decrecen y las cuotas de amortización crecen en progresión geométrica, $A_t = A_1(1+i)^{t-1}$; capital vivo $C_t = a\,a_{\overline{n-t}|i}$ (método prospectivo) $= C_0(1+i)^t - a\,s_{\overline{t}|i}$ (retrospectivo). **Americano**: solo intereses $C_0\,i$ cada periodo y el principal al final; a veces con un fondo de amortización que acumula C_0 al tipo i'. **Italiano**: $A_t = C_0/n$ constante; los términos decrecen en progresión aritmética. **Carencia**: parcial (se pagan intereses, el capital no cambia) o total (los intereses se capitalizan: $C_d = C_0(1+i)^d$); después el préstamo sigue con $n-d$ periodos. El **coste efectivo** (TAE) es la TIR de los flujos reales (principal neto de comisiones frente a los pagos).



Cómo leerlo: en el francés el término es constante pero su composición cambia: al principio casi todo son intereses; al final, casi todo amortización. Por eso cancelar anticipadamente al principio apenas reduce la deuda.

■ Conclusiones

Los tres sistemas devuelven el mismo principal y, a igual tipo, son financieramente equivalentes; difieren en el perfil de pagos y en el total de intereses (más alto cuanto más tarde se amortiza: americano > francés > italiano). En contabilidad, el capital vivo se parte entre corto plazo (la amortización del año siguiente) y largo plazo.

6. Empréstitos, usufructo y nuda propiedad

Empréstitos de obligaciones (tema 56)

■ Supuestos

Un empréstito es un préstamo dividido en N títulos de nominal C con cupón i, suscritos por muchos prestamistas; la amortización se hace por sorteo (títulos completos) según un plan: anualidad constante (francés), número constante de títulos (partes iguales) o al vencimiento (americano). Pueden existir prima de emisión (bajo la par), prima de reembolso, lotes y gastos.

■ Desarrollo

Con amortización por partes iguales: cada año se amortizan N/n títulos y se pagan cupones sobre los vivos, $\text{Anualidad}_t = N_{t-1}\,C\,i + \frac{N}{n}\,C$, decreciente. Con anualidad constante: $N\,C = a\,a_{\overline{n}|i}$ y los títulos amortizados crecen en progresión geométrica, $M_t = M_1(1+i)^{t-1}$, con redondeo. Para el emisor, el coste efectivo es la TIR que iguala lo recibido neto con los pagos; para el obligacionista, la rentabilidad depende de cuándo le toque el sorteo. El **usufructo** de un título es el valor actual de los cupones; la **nuda propiedad**, el valor actual del reembolso: $P = U + NP$.

■ Conclusiones

Un empréstito es contablemente una deuda a coste amortizado: primas y gastos se imputan como mayor gasto financiero a lo largo de la vida vía el tipo de interés efectivo (TIE). Es la pieza que une el tema 56 con la técnica contable (Contabilidad I, ejercicio 41).

7. Valoración de activos financieros

Acciones: Gordon-Shapiro, CAPM y PER (temas 53 y 55)

Supuestos

El valor de un activo es el valor actual de los flujos que genera, descontados a la rentabilidad que el mercado exige por su riesgo. En acciones: dividendos que crecen a una tasa constante g indefinidamente, con $k > g$ (Gordon). En CAPM: inversores diversificados que solo exigen prima por el riesgo sistemático, mercado en equilibrio y activo sin riesgo al que se presta y se toma prestado.

Desarrollo

$$P_0 = \frac{D_1}{k-g} = \frac{D_0(1+g)}{k-g}; \qquad k = r_f + \beta\,(E[r_M] - r_f); \qquad g = ROE \cdot b; \qquad PER = \frac{P}{BPA}$$

La rentabilidad total del accionista es $D_1/P_0 + g$ (rentabilidad por dividendo más crecimiento). El CAPM (línea del mercado de valores, SML) da la k que entra en Gordon: a más beta, más rentabilidad exigida y menor precio. El PER se lee como «años de beneficio que se pagan» o como $1/k$ si no hay crecimiento.

Conclusiones

Gordon es sensible a $k - g$: un punto de diferencia cambia mucho el precio, de ahí que en el examen se pida siempre interpretar (sobrevalorada o infravalorada frente a la cotización) y comentar los supuestos. Madrid 2023 (Reposición, ejercicio 5) pidió exactamente la cadena CAPM → Gordon → decisión.

8. Renta fija

Bonos: precio, TIR, estructura temporal y duración

Supuestos

Un bono promete cupones cN y el nominal N al vencimiento sin riesgo de impago (o con una prima que ya está en la tasa). Los mercados son líquidos y sin fricciones; la ETTI (tipos cupón cero por plazo) es conocida.

Desarrollo

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t}\ \text{(TIR)}, \qquad P = \sum_{t} \frac{F_t}{(1+r_t)^t}\ \text{(ETTI)}, \qquad D = \frac{\sum t\, F_t (1+r)^{-t}}{P}, \qquad \frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{D}{1+r}\,\Delta r$$

Cupón mayor que la TIR: precio sobre la par; menor: bajo la par. La duración de Macaulay es el vencimiento medio ponderado por el valor actual de cada flujo y mide la sensibilidad del precio al tipo; crece con el plazo y decrece con el cupón y con la TIR; en un cupón cero es igual al vencimiento. Inmunización: igualar la duración de la cartera al horizonte de inversión neutraliza el riesgo de tipo (precio y reinversión se compensan). Tipos implícitos a plazo: $(1+r_2)^2 = (1+r_1)(1+f_{1,2})$.

■ Conclusiones

El precio y el tipo se mueven en sentido contrario y la relación es convexa. En el examen suele pedirse valorar con una ETTI dada, obtener la TIR y comparar la sensibilidad de dos bonos: el de mayor duración es el más arriesgado ante subidas de tipos (y el más rentable ante bajadas).

9. Teoría de carteras y CAPM

Markowitz, la recta del mercado de capitales y la SML (temas 49 y 50)

■ Supuestos

Inversores aversos al riesgo que eligen por media y varianza; rentabilidades con distribución conocida; un periodo; sin costes ni impuestos; posibilidad de prestar y endeudarse al tipo sin riesgo (en el CAPM, además, expectativas homogéneas).

■ Desarrollo

Con dos activos, $E[r_p] = wE_1 + (1-w)E_2$ y $\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2$: la diversificación reduce el riesgo si $\rho < 1$ y puede anularlo si $\rho = -1$. La cartera de mínima varianza y la frontera eficiente se obtienen variando w. Con un activo sin riesgo, todas las carteras eficientes están en la recta del mercado de capitales (CML), $E[r_p] = r_f + \frac{E[r_M]-r_f}{\sigma_M}\sigma_p$, cuya pendiente es el ratio de Sharpe del mercado (teorema de separación: todos combinan la misma cartera arriesgada con el activo seguro). Para un activo individual el riesgo relevante es el sistemático, $\beta_i = \mathrm{Cov}(r_i, r_M)/\sigma_M^2$, y en equilibrio:

$$E[r_i] = r_f + \beta_i\,(E[r_M] - r_f) \qquad \text{(SML)}$$

■ Conclusiones

El riesgo específico se elimina diversificando y por eso el mercado no lo remunera; solo paga la beta. La SML es la herramienta para el coste de los fondos propios (WACC) y para detectar activos infravalorados ($\alpha > 0$). La CML se dibuja en el plano (desviación típica, rentabilidad) y vale solo para carteras eficientes; la SML, en (beta, rentabilidad) y vale para cualquier activo.

10. Síntesis

■ Cómo se encadenan los temas

Las leyes financieras (§3) definen cómo se mueven los capitales; las rentas (§4) son capitales en serie; un préstamo (§5) es una renta que devuelve un capital y un empréstito (§6) un préstamo troceado en títulos; un bono (§8) es un título de ese empréstito visto desde el inversor; una acción (§7) es una renta perpetua incierta, y la tasa a la que se descuenta la pone el mercado según el riesgo sistemático (§9). Estudiados en este orden, los temas 55 y 56 y la mitad de los temas de inversión y financiación son una sola historia: equivalencia de capitales con una tasa que refleja tiempo y riesgo.

Activo	Flujos	Tasa de descuento
Préstamo / empréstito	términos amortizativos	tipo pactado (TAE con comisiones)
Bono	cupones + nominal	TIR o ETTI
Acción	dividendos crecientes	k del CAPM
Proyecto de inversión	flujos de caja libres	WACC (Dirección Financiera)