Preparación Práctica
Oposición de Economía

Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria (590) · Comunidad de Madrid

BLOQUE 3

Matemáticas Financieras

Amortización de préstamos (sistema francés) y valoración de activos

Versión con enunciados y soluciones

Material de elaboración propia a partir de pruebas de convocatorias anteriores.

16 de noviembre de 2026

preparación @ecorami

Índice

1 Amortización de préstamos: el sistema francés 2

2 Rentas y planes de ahorro 8

3 Valoración de activos financieros 10

4 Renta fija: valoración de bonos, ETTI y duración 11

5 Teoría de carteras y modelo CAPM 14

6 Empréstitos de obligaciones 18

7 Préstamo con periodo de carencia 19

8 Tantos equivalentes y TAE 19

1. Amortización de préstamos: el sistema francés

Ejercicio 1

Fuente: Andalucía 2021, Ejercicio 3 *Puntuación: 2,5 puntos*

Nos conceden un préstamo con las siguientes condiciones: capital concedido 60.000 €, tipo de interés 3,5% efectivo anual y duración 10 años. Se pide:

a) El pago anual constante.

b) El capital pendiente de amortizar transcurridos cuatro años.

c) El capital amortizado hasta el sexto año.

d) La cuota de intereses del décimo año.

e) Si al finalizar el cuarto año se cancela anticipadamente 8.000 € (comisión de cancelación del 1%), la nueva anualidad que extingue el préstamo.

f) Identificar y caracterizar el método de amortización aplicado.

Solución

Datos: $C_0 = 60.000$, $i = 0{,}035$, $n = 10$. La anualidad constante del sistema francés se obtiene igualando el préstamo al valor actual de las n anualidades.

a) Pago anual constante

$$a = C_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 60.000 \cdot \frac{0{,}035}{1-1{,}035^{-10}} = \frac{2.100}{0{,}291081} \approx 7.214{,}48 \text{ €}.$$

Resultado. Anualidad constante $a \approx 7.214{,}48$ €.

b) Capital pendiente tras 4 años (método del saldo retrospectivo/prospectivo)

Es el valor actual de las 6 anualidades que restan:

$$C_4 = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-6}}{i} = 7.214{,}48 \cdot \frac{1-1{,}035^{-6}}{0{,}035} \approx 38.442{,}8 \text{ €}.$$

Resultado. Capital vivo a los 4 años $\approx 38.442{,}8$ €.

c) Capital amortizado hasta el sexto año

Es la diferencia entre el capital inicial y el pendiente tras 6 años ($C_6 = a \cdot \frac{1-1{,}035^{-4}}{0{,}035} \approx 26.499{,}4$):

$$\text{Amortizado}_{1\text{-}6} = C_0 - C_6 = 60.000 - 26.499{,}4 \approx 33.500{,}6 \text{ €}.$$

Resultado. Capital amortizado en los 6 primeros años $\approx 33.500{,}6$ €.

d) Cuota de intereses del décimo año

Los intereses del año 10 se calculan sobre el capital vivo al inicio de ese año ($C_9 = a \cdot \frac{1-1{,}035^{-1}}{0{,}035} \approx 6.970{,}6$):

$$I_{10} = i \cdot C_9 = 0{,}035 \cdot 6.970{,}6 \approx 243{,}97 \text{ €}.$$

Resultado. Cuota de intereses del año 10 $\approx 243{,}97$ € (la última, y la más pequeña).

e) Cancelación anticipada de 8.000 € al final del año 4

El capital vivo pasa de 38.442,8 a $38.442{,}8 - 8.000 = 30.442{,}8$ € (la comisión del 1%, 80 €, es un coste que se paga aparte, no reduce capital). La nueva anualidad para los 6 años restantes:

$$a' = 30.442{,}8 \cdot \frac{0{,}035}{1 - 1{,}035^{-6}} \approx 5.713{,}14 \text{ €}.$$

Resultado. Nueva anualidad $a' \approx 5.713{,}14$ € (más una comisión única de 80 €).

f) Método aplicado

Es el **sistema francés** o de *términos amortizativos constantes*: la anualidad es fija; dentro de ella, la cuota de intereses decrece y la cuota de amortización (capital) crece en progresión geométrica de razón $(1 + i)$.

Resultado. Sistema francés: anualidad constante, intereses decrecientes y amortización de capital creciente.



La intuición

La idea que más cuesta ver: aunque pagas siempre lo mismo cada año, al principio casi todo es interés y muy poco capital; al final es al revés. ¿Por qué? Porque los intereses se cobran sobre lo que aún debes, y al principio debes mucho. Por eso el "capital vivo" en cualquier momento es simplemente el valor actual de los pagos que te quedan: si quisieras cancelar hoy, pagarías justo eso. Cancelar anticipadamente capital reduce la deuda y, como el plazo no cambia, baja la cuota.

Ejercicio 2

Fuente: Castilla y León 2020, Ejercicio 1 *Puntuación: 3,5 puntos*

Una familia adquiere una vivienda tasada en 260.000 €. La financian con un préstamo hipotecario por el 80% del valor de tasación, a tipo fijo del 3% anual, amortizable mediante mensualidades constantes durante 20 años (sistema francés). Se pide:

a) El importe de la mensualidad constante.

b) La cuota de amortización del último mes de la vida del préstamo.

c) La cantidad necesaria para cancelar el préstamo transcurridos 10 años, si la comisión de cancelación es del 1% sobre lo adeudado.

d) Al finalizar el 5º año el tipo se revisa a la baja, al 2,5% anual. Calcule la nueva mensualidad.

Solución

Capital $C_0 = 0{,}80 \cdot 260.000 = 208.000$ €. Con tanto nominal anual del 3% pagadero mensualmente, el tipo mensual es $i_m = 0{,}03/12 = 0{,}0025$ y el número de mensualidades $n = 20 \cdot 12 = 240$.

a) Mensualidad constante

$$a = C_0 \cdot \frac{i_m}{1-(1+i_m)^{-n}} = 208.000 \cdot \frac{0{,}0025}{1-1{,}0025^{-240}} = \frac{520}{0{,}450779} \approx 1.153{,}56 \text{ €}.$$

> **Resultado.** Mensualidad $a \approx 1.153{,}56$ €.

b) Cuota de amortización del último mes

En la última cuota apenas quedan intereses; la parte de capital es $A_{240} = a\,(1+i_m)^{-1}$:

$$A_{240} = \frac{1.153{,}56}{1{,}0025} \approx 1.150{,}69 \text{ €}.$$

> **Resultado.** Amortización del último mes $\approx 1.150{,}69$ € (los intereses de ese mes son solo $\approx 2{,}88$ €).

c) Cancelación a los 10 años

Tras 120 mensualidades, el capital vivo es el valor actual de las 120 restantes:

$$C_{120} = a \cdot \frac{1-1{,}0025^{-120}}{0{,}0025} \approx 119.465{,}0 \text{ €}.$$

Con la comisión del 1%:

$$\text{Cancelar} = 119.465{,}0 \cdot 1{,}01 \approx 120.659{,}7 \text{ €}.$$

> **Resultado.** Para cancelar a los 10 años hacen falta $\approx 120.659{,}7$ € (capital vivo más 1% de comisión).

d) Revisión del tipo al 2,5% tras el 5.º año

Tras 60 mensualidades, el capital vivo (al 3%) es $C_{60} = a \cdot \frac{1-1{,}0025^{-180}}{0{,}0025} \approx 167.042{,}2$ €. Con el nuevo tipo mensual $i'_m = 0{,}025/12 \approx 0{,}0020833$ y los 180 meses restantes:

$$a' = 167.042{,}2 \cdot \frac{0{,}0020833}{1-(1{,}0020833)^{-180}} \approx 1.113{,}82 \text{ €}.$$

> **Resultado.** Nueva mensualidad $a' \approx 1.113{,}82$ € (baja unos 40 €/mes al reducirse el tipo).



La intuición

Dos avisos prácticos de examen. Primero: "tipo anual del 3% pagadero mensualmente" significa dividir entre 12 ($i_m = 0{,}25\%$), no hallar la raíz duodécima; es el tanto nominal, no el efectivo. Segundo: para cancelar o revisar un préstamo nunca partes de cero, sino del capital vivo, *que es el valor actual de las cuotas pendientes. Una vez lo tienes, una revisión del tipo es simplemente "un préstamo nuevo" por ese saldo y el plazo que queda.*

Ejercicio 3

Fuente: Madrid 2018, Ejercicio 5 *Puntuación: 2,5 puntos*

Se concede un préstamo de 18.000 € amortizable en 8 años mediante términos amortizativos mensuales constantes (sistema francés). El interés pactado es el 6% nominal anual pagadero mensualmente. El préstamo tiene una **carencia parcial** durante los dos primeros años (solo se pagan intereses). Se pide:

a) El término amortizativo mensual durante los dos primeros años.

b) El término amortizativo número 25.

c) Si al final del año 5 se hace una amortización anticipada de 4.000 €, el término amortizativo número 61.

d) Si al final del año 6 el tipo se revisa al 5% nominal anual pagadero mensualmente, el nuevo término amortizativo mensual.

e) Si la carencia hubiera sido **total** durante los dos primeros años, la cuota de interés y de capital del término número 25.

Solución

Tipo mensual $i_m = 0{,}06/12 = 0{,}005$; duración 96 meses, de los que los 24 primeros son de carencia.

a) Término durante la carencia parcial

Solo se pagan intereses sobre el capital, que permanece en 18.000:

$$T_{\text{car}} = i_m \cdot C_0 = 0{,}005 \cdot 18.000 = 90 \text{ €/mes}.$$

Resultado. Durante los 24 primeros meses se pagan 90 €/mes (solo intereses).

b) Término número 25

Acabada la carencia el capital sigue siendo 18.000 y se amortiza en los 72 meses restantes:

$$a = 18.000 \cdot \frac{0{,}005}{1 - 1{,}005^{-72}} \approx 298{,}31 \text{ €}.$$

Resultado. Término n.º 25 (primero del periodo de amortización) $\approx$ 298,31 €.

c) Término número 61 (tras amortización anticipada)

Al final del año 5 (mes 60) se han pagado 36 cuotas de amortización; el capital vivo es

$$C_{60} = a \cdot \frac{1 - 1{,}005^{-36}}{0{,}005} \approx 9.805{,}82 \text{ €}.$$

Tras amortizar 4.000 quedan 5.805,82 €, y el nuevo término para los 36 meses restantes:

$$a' = 5.805{,}82 \cdot \frac{0{,}005}{1 - 1{,}005^{-36}} \approx 176{,}62 \text{ €}.$$

> **Resultado.** Término n.º 61 $\approx$ 176,62 €.

d) Nuevo término tras la revisión al 5%

Continuando la operación, al final del año 6 (mes 72) se han pagado 12 cuotas de a'; el capital vivo es $C_{72} = a' \cdot \frac{1-1{,}005^{-24}}{0{,}005} \approx 3.985{,}15$. Con el nuevo tipo $i'_m = 0{,}05/12 \approx 0{,}0041667$ y los 24 meses que restan:

$$a'' = 3.985{,}15 \cdot \frac{0{,}0041667}{1 - (1{,}0041667)^{-24}} \approx 174{,}83 \text{ €}.$$

> **Resultado.** Nuevo término mensual $\approx$ 174,83 €.

e) Si la carencia hubiera sido total

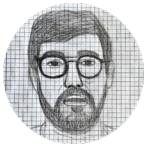
Sin pagar nada durante dos años, los intereses se capitalizan y la deuda crece:

$$D_{24} = 18.000 \cdot 1{,}005^{24} \approx 20.288{,}88 \text{ €}.$$

El término que amortiza esa deuda en 72 meses es $a = 20.288{,}88 \cdot \frac{0{,}005}{1-1{,}005^{-72}} \approx 336{,}25$. En el término n.º 25 (el primero):

$$\text{Interés} = 0{,}005 \cdot 20.288{,}88 \approx 101{,}44; \quad \text{Capital} = 336{,}25 - 101{,}44 \approx 234{,}80 \text{ €}.$$

> **Resultado.** Con carencia total: interés del término 25 $\approx$ 101,44 € y cuota de capital $\approx$ 234,80 €.



La intuición

La diferencia entre las dos carencias es clave. En la parcial *pagas los intereses cada mes, así que la deuda se queda congelada en* 18.000. *En la* total *no pagas nada, pero los intereses no desaparecen: se suman al capital (se capitalizan) y la deuda crece hasta* 20.289. *Por eso una carencia total alivia hoy, pero encarece todo lo que viene después. Y observa el patrón de siempre: para recalcular cuotas tras una amortización anticipada o una revisión de tipo, partes del capital vivo, que es el valor actual de lo que falta.*

Ejercicio 4

Fuente: Madrid 2023 (Reposición), Ejercicio 4 *Puntuación: 3,25 puntos*

Una entidad financia la compra de un vehículo cuyo precio al contado es 19.930 €. El préstamo se amortiza con 6 mensualidades de 157,19 € y, a continuación, 114 mensualidades de cuantía a calcular. El cliente **inicia el pago 6 meses después de la compra**. Los tipos nominales aplicados son $j_{12} = \text{Euríbor} + 1\%$ los 6 primeros meses, $j_{12} = \text{Euríbor} + 1{,}5\%$ los 6 siguientes y $j'_{12} = 8{,}25\%$ el tiempo restante.

a) La cuantía de las 114 últimas mensualidades, sabiendo que el Euríbor aplicado fue 1,249% los 6 primeros meses y 2,233% los 6 siguientes.

b) El capital pendiente pasados dos años y medio desde la adquisición.

Solución

Hay tres tramos de tipo mensual:

$$i_1 = \frac{0{,}02249}{12} \approx 0{,}0018742, \quad i_2 = \frac{0{,}03733}{12} \approx 0{,}0031108, \quad i_3 = \frac{0{,}0825}{12} = 0{,}006875,$$

y un *diferimiento*: durante los 6 primeros meses no se paga nada.

a) Cuantía de las 114 mensualidades

Meses 1–6 (sin pago): la deuda capitaliza al primer tipo:

$$D_6 = 19.930 \cdot (1{,}0018742)^6 \approx 20.155{,}17.$$

Meses 7–12 (6 cuotas de 157,19*):* al segundo tipo,

$$D_{12} = D_6\,(1{,}0031108)^6 - 157{,}19 \cdot \frac{(1{,}0031108)^6 - 1}{0{,}0031108} \approx 19.583{,}79.$$

*Meses 13–126 (*114 *cuotas* X*):* al tercer tipo, X amortiza ese capital:

$$X = D_{12} \cdot \frac{0{,}006875}{1 - (1{,}006875)^{-114}} \approx 248{,}37\ €.$$

Resultado. Las 114 mensualidades son de $\approx 248{,}37$ €.

b) Capital pendiente a los 2 años y medio

A los 30 meses se han pagado las 6 cuotas de 157,19 (meses 7–12) y 18 cuotas de X (meses 13–30); quedan 96 cuotas de X. El capital vivo es su valor actual:

$$C_{30} = X \cdot \frac{1-(1{,}006875)^{-96}}{0{,}006875} \approx 17.412{,}45\ €.$$

Resultado. Capital pendiente a los 2,5 años $\approx$ 17.412,45 €.



La intuición

Este problema junta tres dificultades típicas de las ofertas reales de financiación: un diferimiento *inicial (no pagas, pero la deuda crece), un* tipo variable *por tramos (cada periodo capitaliza al suyo) y un cambio en la cuota. La estrategia es ir "arrastrando" el capital vivo de un tramo al siguiente: capitalizas, restas lo pagado, y al llegar al tramo final calculas la cuota que amortiza el saldo que queda. El capital pendiente, como siempre, es el valor actual de las cuotas que faltan.*

2. Rentas y planes de ahorro

Ejercicio 5

Fuente: Madrid 2023 (Estabilización), Ejercicio 3 *Puntuación: 3 puntos*

a) Una persona concierta un plan de ahorro para formar un capital de 100.000 € en 15 años.

   i) Calcule la cantidad a ingresar al principio de cada año si la entidad abona el 3% anual constante.

   ii) Si transcurridos 8 años la entidad incrementa en un punto la remuneración, calcule la nueva anualidad a ingresar a partir de ese momento para obtener el capital citado.

b) Una persona tiene un plan de ahorro de 10 años, a tanto nominal del 5%, por el que ingresa 300 € al principio de cada mes. Transcurridos 4 años, otra entidad le ofrece un rédito mensual del 0,5%. Con una comisión de cancelación del 4% sobre el capital constituido y 300 € de gastos de tramitación:

   i) Estudie la conveniencia de cancelar y trasladar el capital.

   ii) Indique la expresión del tanto efectivo anual equivalente al rédito mensual.

Solución

a.i) Imposición anual (renta prepagable, 3%)

El capital se forma con imposiciones al *principio* de cada año (renta prepagable), cuyo valor final es $VF = a \cdot \frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)$:

$$100.000 = a \cdot \frac{1{,}03^{15}-1}{0{,}03}(1{,}03) \;\Rightarrow\; a = \frac{100.000}{19{,}1569} \approx 5.220{,}06\ €.$$

Resultado. Hay que ingresar $\approx 5.220{,}06$ € al principio de cada año.

a.ii) Nueva anualidad tras la subida al 4%

El capital acumulado al final del año 8 (con las 8 primeras imposiciones al 3%) es $VF_8 = 5.220{,}06 \cdot \frac{1{,}03^8-1}{0{,}03}\,(1{,}03) \approx 47.811{,}05$, que crece al 4% durante los 7 años restantes: $47.811{,}05 \cdot 1{,}04^7 \approx 62.916{,}08$. Faltan $100.000 - 62.916{,}08 = 37.083{,}92$, que se forman con 7 imposiciones prepagables al 4%:

$$a' = \frac{37.083{,}92}{\frac{1{,}04^7-1}{0{,}04}\,(1{,}04)} \approx 4.514{,}60 \text{ €}.$$

Resultado. A partir del año 9 basta con ingresar $\approx 4.514{,}60$ €/año (menos, porque el dinero ya ahorrado renta ahora más).

b.i) ¿Conviene cancelar y trasladar?

Capital constituido a los 4 años (48 imposiciones mensuales prepagables al $i_m = 0{,}05/12$):

$$C_{48} = 300 \cdot \frac{(1{,}0041667)^{48}-1}{0{,}0041667}\,(1{,}0041667) \approx 15.970{,}73.$$

Si cancela, recupera $15.970{,}73 \cdot 0{,}96 - 300 \approx 15.031{,}90$. Comparamos el capital final a los 10 años (faltan 72 meses ingresando 300/mes):

$$\text{Quedarse (5\%)}: \; 15.970{,}73\,(1{,}0041667)^{72} + 300 \cdot \tfrac{(1{,}0041667)^{72}-1}{0{,}0041667}(1{,}0041667) \approx 46.778{,}79,$$

$$\text{Trasladar (0{,}5\% mensual)}: \; 15.031{,}90\,(1{,}005)^{72} + 300 \cdot \tfrac{(1{,}005)^{72}-1}{0{,}005}(1{,}005) \approx 47.578{,}62.$$

Resultado. Conviene **trasladar**: se obtienen $\approx 799{,}84$ € más al final, pese a la comisión y los gastos, porque el rédito del 0,5% mensual ($\approx 6\%$ nominal) supera al 5% de la entidad original.

b.ii) Tanto efectivo anual equivalente

A partir del rédito mensual i_m, el tanto efectivo anual equivalente es $i = (1+i_m)^{12} - 1$. Con $i_m = 0{,}005$:

$$i = (1{,}005)^{12} - 1 \approx 0{,}0617 \;(6{,}17\%).$$

Resultado. Tanto efectivo anual $= (1+i_m)^{12} - 1 \approx 6{,}17\%$.



La intuición

Dos ideas. Primera: "al principio de cada periodo" significa renta prepagable*, y por eso multiplicamos por* $(1+i)$ *respecto a la pospagable: cada ingreso gana un periodo extra de intereses. Segunda, sobre la decisión de cancelar: no basta con mirar la comisión; hay que comparar el capital final en cada escenario. Aquí el tipo nuevo es tan superior que compensa el coste de salida. Y ojo con nominal frente a efectivo: un* 0,5% *mensual no es un* 6% *anual, sino un* 6,17% *efectivo, porque los intereses generan intereses.*

3. Valoración de activos financieros

Ejercicio 6

Fuente: Madrid 2023 (Reposición), Ejercicio 5 *Puntuación: 2,25 puntos*

La empresa constructora RAGAX tuvo, al final del año pasado, unas ventas por acción de 183 €, un beneficio por acción de 3,850 € y repartió dividendos por acción de 1,75 €. El crecimiento esperado es del 6% indefinidamente. Sus acciones tienen una beta de 1,12, el tipo sin riesgo es del 8% y la prima de riesgo del mercado, del 6,5%. Determine:

a) El precio teórico de RAGAX.

b) El PER actual de la empresa.

c) El ROE de la compañía.

d) El valor contable de las acciones.

Solución

a) Precio teórico (Gordon-Shapiro + CAPM)

Primero, la rentabilidad exigida por el accionista mediante el CAPM:

$$k_e = r_f + \beta\,(\text{prima}) = 0{,}08 + 1{,}12 \cdot 0{,}065 = 0{,}1528 \ (15{,}28\%).$$

Con el modelo de Gordon, y dividendo del próximo año $D_1 = D_0(1+g) = 1{,}75 \cdot 1{,}06 = 1{,}855$:

$$P_0 = \frac{D_1}{k_e - g} = \frac{1{,}855}{0{,}1528 - 0{,}06} = \frac{1{,}855}{0{,}0928} \approx 19{,}99 \ €.$$

Resultado. $k_e = 15{,}28\%$; precio teórico $P_0 \approx 19{,}99$ €.

b) PER actual

$$PER = \frac{P_0}{BPA} = \frac{19{,}99}{3{,}85} \approx 5{,}19.$$

Resultado. $PER \approx 5{,}19$ (el mercado paga 5,19 € por cada euro de beneficio anual).

c) ROE

El crecimiento sostenible cumple $g = b \cdot ROE$, donde b es la tasa de retención de beneficios. El reparto (*pay-out*) es $\frac{1{,}75}{3{,}85} = 0{,}4545$, luego $b = 1 - 0{,}4545 = 0{,}5455$ y

$$ROE = \frac{g}{b} = \frac{0{,}06}{0{,}5455} \approx 0{,}11 \ (11\%).$$

Resultado. $ROE \approx 11\%$.

d) Valor contable de la acción

Como $ROE = \dfrac{BPA}{\text{valor contable}}$:

$$VC = \frac{BPA}{ROE} = \frac{3{,}85}{0{,}11} \approx 35\ €.$$

Resultado. Valor contable ≈ 35 €/acción. (Las ventas por acción de 183 € no intervienen en estos cálculos; servirían para el ratio precio/ventas.)



La intuición

Fíjate en cómo encajan tres piezas. El CAPM dice cuánto *hay que exigirle a la acción según su riesgo (su beta): más riesgo, más rentabilidad exigida, y por tanto menor precio. Gordon convierte la corriente futura de dividendos crecientes en un precio de hoy. Y la relación $g = b \cdot ROE$ cierra el círculo: una empresa crece reteniendo beneficios (b) y reinvirtiéndolos a su rentabilidad (ROE). Por eso un PER bajo como este (5,19) suele reflejar, o bien mucho riesgo exigido, o bien pocas expectativas de crecimiento.*

4. Renta fija: valoración de bonos, ETTI y duración

Ejercicio 7

Fuente: UC3M · Economía Financiera (renta fija) *Puntuación: 2,5 puntos*

Valore los siguientes bonos (nominal 1.000 € en todos los casos):

a) Un bono del Tesoro a 20 años con cupón anual del 3% y amortización a la par, si la estructura temporal de tipos (ETTI) es plana al 3%.

b) Un bono a 4 años con cupón anual del 5% y amortización con una prima del 20% sobre el nominal, si los tipos de interés anuales del año 1 al 4 son 2%, 3%, 4% y 5%.

c) Un bono de Telefónica a 3 años con cupón anual del 5%, sabiendo que la ETTI es plana al 1% y que su rating BBB+ implica una prima de riesgo del 1% para todos los plazos.

Solución

a) Bono a la par

El precio es el valor actual de los cupones más el reembolso. Cuando el cupón (3%) coincide con el tipo de descuento (3%), el bono cotiza **a la par**:

$$P = \sum_{t=1}^{20} \frac{30}{1{,}03^t} + \frac{1.000}{1{,}03^{20}} = 1.000\ €.$$

Resultado. $P = 1.000$ € (a la par): cupón = tipo $\Rightarrow$ precio = nominal.

b) Estructura temporal de tipos y prima de amortización

La amortización con prima del 20% significa un reembolso de 1.200 € en el año 4. Cada flujo se descuenta a su tipo:

$$P = \frac{50}{1{,}02} + \frac{50}{1{,}03^2} + \frac{50}{1{,}04^3} + \frac{50 + 1.200}{1{,}05^4} \approx 1.168{,}98\ €.$$

Resultado. $P \approx 1.168{,}98$ € (cotiza con prima por el reembolso por encima del nominal).

c) Prima de riesgo de crédito

El riesgo de crédito se incorpora aumentando el tipo de descuento: $1\% + 1\% = 2\%$:

$$P = \frac{50}{1{,}02} + \frac{50}{1{,}02^2} + \frac{1.050}{1{,}02^3} \approx 1.086{,}52\ €.$$

Resultado. $P \approx 1.086{,}52$ €. A mayor prima de riesgo, mayor tipo de descuento y menor precio.



La intuición

Un bono no es más que una cuenta de valores actuales: descuentas cada flujo prometido al tipo que le corresponde. De ahí salen las tres situaciones clásicas: si el cupón iguala al tipo, cotiza a la par; si lo supera (o hay prima de amortización), cotiza con prima; si el mercado exige más (por plazo o por riesgo de crédito), cotiza con descuento. La prima de riesgo de Telefónica es justo eso: como puede impagar, el inversor exige más rentabilidad, y eso baja el precio.

Ejercicio 8

Fuente: UC3M · Economía Financiera (renta fija) *Puntuación: 2 puntos*

a) En el mercado secundario, los bonos cupón cero del Tesoro (nominal 1.000 €) cotizan: vencimiento 1 año, 990; 2 años, 965; 3 años, 945; 4 años, 910; 5 años, 875; 6 años, 770. Obtenga la estructura temporal de tipos (tipos al contado).

b) Si $R_1 = 3\%$, $R_2 = 4\%$ y $R_3 = 5\%$, calcule el tipo forward implícito para un préstamo a dos años que comienza dentro de un año ($_0f_{1,3}$).

Solución

a) ETTI a partir de bonos cupón cero

Cada cupón cero da directamente el tipo al contado de su plazo: $r_t = \left(\frac{1.000}{P_t}\right)^{1/t} - 1$.

Plazo (años)	1	2	3	4	5	6
Precio	990	965	945	910	875	770
r_t	1,01%	1,80%	1,90%	2,39%	2,71%	4,45%

Resultado. ETTI creciente: del 1,01% a un año al 4,45% a seis años.

b) Tipo forward implícito

Por ausencia de arbitraje, invertir 3 años al contado debe igualar invertir 1 año y reinvertir 2 años al tipo forward:

$$(1+R_3)^3 = (1+R_1)\,(1+{}_0f_{1,3})^2 \;\Rightarrow\; {}_0f_{1,3} = \left(\frac{1{,}05^3}{1{,}03}\right)^{1/2} - 1 \approx 6{,}01\%.$$

Resultado. ${}_0f_{1,3} \approx 6{,}01\%$: es el tipo a dos años, dentro de un año, que hoy descuenta la curva.



La intuición

La curva de tipos esconde dos lecturas. La ETTI (tipos al contado) te dice cuánto renta invertir hoy hasta cada plazo; los bonos cupón cero la revelan "limpia", sin cupones de por medio. El tipo forward es la otra cara: el mercado, con los tipos de hoy, ya está fijando implícitamente a qué tipo podrás invertir en el futuro. Si no fuese así, habría una ganancia segura encadenando inversiones, y eso el mercado lo elimina.

Ejercicio 9

Fuente: UC3M · Economía Financiera (renta fija) *Puntuación: 2 puntos*

a) Calcule la duración (de Macaulay) de un bono a 3 años con cupón anual del 6%, nominal 1.000 € y ETTI plana al 4%.

b) Calcule la duración modificada de un bono a 4 años con cupón anual del 5%, nominal 1.000 € y tipo del 3%.

c) Un bono cupón cero a 3 años tiene una TIR del 1,08%. Si el BCE baja los tipos en 0,25 puntos, ¿cuánto varía su precio?

Solución

a) Duración de Macaulay

La duración es el plazo medio de los flujos, ponderado por su valor actual: $D = \dfrac{\sum_t t \cdot VA(FC_t)}{P}$.

t	FC_t	$VA = FC_t/1{,}04^t$	$t \cdot VA$
1	60	57,69	57,69
2	60	55,47	110,95
3	1.060	942,34	2.827,01
		$P = 1.055{,}50$	$\sum = 2.995{,}65$

$$D = \frac{2.995{,}65}{1.055{,}50} \approx 2{,}84 \text{ años.}$$

Resultado. Duración ≈ 2,84 años (menor que los 3 de vencimiento, porque parte del valor llega antes con los cupones).

b) Duración modificada

Para ese bono, el precio es 1.074,34 y la duración de Macaulay $D \approx 3{,}734$ años. La duración modificada es

$$D_{\text{mod}} = \frac{D}{1+i} = \frac{3{,}734}{1{,}03} \approx 3{,}63 \text{ años.}$$

Resultado. Duración modificada $\approx 3{,}63$ años.

c) Sensibilidad precio–tipo

En un cupón cero la duración coincide con el vencimiento ($D = 3$), así que $D_{\text{mod}} = \frac{3}{1{,}0108} \approx 2{,}968$. La variación porcentual del precio es

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i = -2{,}968 \cdot (-0{,}0025) \approx +0{,}74\%.$$

Resultado. El precio *sube* un $\approx 0{,}74\%$ (los tipos bajan y los bonos ya emitidos se revalorizan).



La intuición

La duración tiene dos caras que conviene dominar. Como plazo medio*, mide cuándo "de media" cobras: por eso un cupón cero, que paga todo al final, tiene duración igual a su vencimiento, y un bono con cupones la tiene menor. Como* sensibilidad*, la duración modificada dice cuánto se mueve el precio si cambian los tipos: precio y tipos van en sentido contrario, y cuanto mayor es la duración, más brusco es el balanceo. Es la herramienta básica para medir el riesgo de tipo de interés de una cartera de renta fija.*

5. Teoría de carteras y modelo CAPM

Ejercicio 10

Fuente: UC3M · Economía Financiera (modelo de Markowitz) *Puntuación: 2,5 puntos*

a) Determine la cartera de mínima varianza entre dos activos, GAGO y LUCO, cuya correlación es -1 y cuyas volatilidades son 18% y 25%, respectivamente.

b) Determine la cartera de mínima varianza entre dos activos: A (rentabilidad 6%, volatilidad 27%) y B (rentabilidad 9%, volatilidad 32%), con correlación 0,30.

c) Un inversor puede combinar con Letras del Tesoro (rentabilidad 2%) uno de estos tres fondos. ¿Cuál debería elegir? A: 12% y 20%; B: 22% y 24%; C: 25% y 32% (rentabilidad y volatilidad).

Solución

La ponderación del activo 1 en la cartera de mínima varianza es

$$w_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho\,\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\,\sigma_1\sigma_2}.$$

a) Correlación -1

Con $\rho = -1$ la fórmula se reduce a $w_{\text{GAGO}} = \frac{\sigma_{\text{LUCO}}}{\sigma_{\text{GAGO}}+\sigma_{\text{LUCO}}} = \frac{0{,}25}{0{,}18+0{,}25} \approx 58{,}14\%$.

Resultado. $w_{\text{GAGO}} \approx 58{,}14\%$ y $w_{\text{LUCO}} \approx 41{,}86\%$. Con $\rho = -1$ esta cartera tiene **riesgo cero**: los movimientos de un activo cancelan exactamente los del otro.

b) Correlación 0,30

$\text{Cov} = 0{,}30 \cdot 0{,}27 \cdot 0{,}32 = 0{,}02592$, y

$$w_A = \frac{0{,}32^2 - 0{,}02592}{0{,}27^2 + 0{,}32^2 - 2 \cdot 0{,}02592} = \frac{0{,}07648}{0{,}12346} \approx 61{,}95\%.$$

Resultado. $w_A \approx 61{,}95\%$ y $w_B \approx 38{,}05\%$.

c) Elección de fondo (ratio de Sharpe)

Con activo sin riesgo, se elige el de mayor ratio de Sharpe $\frac{E(r)-r_f}{\sigma}$:

$$A: \tfrac{12-2}{20} = 0{,}50; \quad B: \tfrac{22-2}{24} = 0{,}83; \quad C: \tfrac{25-2}{32} = 0{,}72.$$

Resultado. Se elige el **Fondo B** (mayor Sharpe, 0,83): ofrece más rentabilidad por unidad de riesgo, y luego se ajusta el riesgo combinándolo con Letras.



La intuición

La idea central de Markowitz es que el riesgo de una cartera no es la suma de los riesgos: depende de cómo se mueven juntos los activos (la correlación). Si dos activos van en sentido contrario ($\rho = -1$), se puede incluso eliminar el riesgo por completo, como en el apartado a). Y cuando existe un activo sin riesgo, la elección de la cartera arriesgada es la misma para todos: la de mayor ratio de Sharpe (la "tangente"); cada inversor solo decide después cuánto pone en ella y cuánto en el activo sin riesgo.

Ejercicio 11

Fuente: UC3M · Economía Financiera (frontera y CAL) *Puntuación: 2 puntos*

a) Con un activo sin riesgo que renta el 1% y una cartera arriesgada de rentabilidad 10% y volatilidad 15%, escriba la ecuación de la *Capital Allocation Line* (CAL).

b) La cartera óptima con riesgo tiene rentabilidad esperada 15% y volatilidad 22%; el activo sin riesgo renta 5%. ¿Qué proporción invertir en cada uno para que la cartera final tenga un riesgo del 12%? ¿Qué rentabilidad esperada se obtiene?

Solución

a) Capital Allocation Line

La CAL parte del activo sin riesgo con pendiente igual al ratio de Sharpe:

$$E(r) = r_f + \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}\,\sigma = 0{,}01 + \frac{0{,}10 - 0{,}01}{0{,}15}\,\sigma = 0{,}01 + 0{,}60\,\sigma.$$

Resultado. $E(r) = 0{,}01 + 0{,}60\,\sigma$: por cada punto de volatilidad asumida, se exigen 0,60 puntos más de rentabilidad.

b) Asignación de capital

El riesgo de la cartera mixta es proporcional al peso en la arriesgada: $\sigma = y\,\sigma_p$, luego $y = \frac{0{,}12}{0{,}22} \approx 54{,}55\%$ en la cartera arriesgada y 45,45% en el activo sin riesgo. La rentabilidad:

$$E(r) = 0{,}05 + 0{,}5455\,(0{,}15 - 0{,}05) \approx 10{,}45\%.$$

Resultado. 54,55% en la cartera arriesgada y 45,45% en el activo sin riesgo, para una rentabilidad esperada del $\approx 10{,}45\%$.



La intuición

Una vez elegida la mejor cartera arriesgada, mezclarla con el activo sin riesgo es como un mando de volumen: subes o bajas el riesgo deslizándote por la recta CAL, sin cambiar de "emisora". Aquí, para rebajar el riesgo del 22% al 12%, basta con aparcar casi la mitad del dinero en Letras. Conviene recordar también que el riesgo que el mercado premia es solo el sistemático (el del conjunto): el específico de cada activo se diluye al diversificar y, por tanto, no se remunera.

Ejercicio 12

Fuente: UC3M · Economía Financiera (modelo CAPM) *Puntuación: 2,5 puntos*

a) Calcule la beta de un activo cuya covarianza con el índice de mercado es 0,011, siendo la varianza del mercado 0,022.

b) Un fondo se compone de tres activos: el 1 ($\beta = 0{,}06$, peso 23%), el 2 ($\beta = 1{,}01$, peso 37%) y el 3 (peso 40%), cuya covarianza con el mercado es 0,0405, siendo la volatilidad del mercado 15%. Calcule la beta del fondo.

c) Se espera que Fedex rinda un 10%; su beta es 0,9, la rentabilidad esperada del mercado 8% y el activo sin riesgo 0,30%. ¿Está bien valorada?

d) Valore las acciones de Amazon, que pagan un dividendo constante de 1,5 € a perpetuidad (el primero dentro de un año), con beta 1,7, prima de riesgo del mercado 12% y rentabilidad del mercado 13,5%.

Solución

a) Beta de un activo

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(i, M)}{\mathrm{Var}(M)} = \frac{0{,}011}{0{,}022} = 0{,}5.$$

Resultado. $\beta = 0{,}5$: el activo amplifica la mitad los movimientos del mercado (defensivo).

b) Beta de una cartera

La beta del activo 3 es $\beta_3 = \frac{0{,}0405}{0{,}15^2} = 1{,}8$, y la beta del fondo es la media ponderada:

$$\beta = 0{,}23 \cdot 0{,}06 + 0{,}37 \cdot 1{,}01 + 0{,}40 \cdot 1{,}8 = 1{,}1075.$$

Resultado. $\beta_{\text{fondo}} = 1{,}1075$ (algo más volátil que el mercado).

c) ¿Está bien valorada Fedex? (SML)

La rentabilidad que exige el CAPM es

$$E(r) = r_f + \beta\,[E(r_M) - r_f] = 0{,}30\% + 0{,}9\,(8\% - 0{,}30\%) = 7{,}23\%.$$

El mercado espera un 10%, por encima del 7,23% exigido: el activo renta más de lo que le corresponde por su riesgo, luego está **infravalorado** y su precio debería subir (hasta que su rentabilidad baje al 7,23%).

Resultado. Rentabilidad exigida 7,23% $<$ esperada 10%: Fedex está infravalorada; su precio debería subir.

d) Valoración con CAPM + perpetuidad

La prima de mercado es $E(r_M) - r_f = 12\%$, luego $r_f = 13{,}5\% - 12\% = 1{,}5\%$ y la rentabilidad exigida a Amazon es $k_e = 1{,}5\% + 1{,}7 \cdot 12\% = 21{,}9\%$. Como dividendo constante a perpetuidad:

$$P = \frac{D}{k_e} = \frac{1{,}5}{0{,}219} \approx 6{,}85\ €.$$

Resultado. $k_e = 21{,}9\%$ y precio $\approx 6{,}85$ €.



La intuición

El CAPM cierra el círculo de todo el bloque financiero. Markowitz dice que solo importa el riesgo que no se puede diversificar; el CAPM lo mide con la beta y le pone precio: la rentabilidad exigida sube con la beta a lo largo de la SML. Esa rentabilidad exigida es la vara de medir: si un activo promete más (Fedex), está barato y subirá; y si la usamos como tasa de descuento (Amazon), obtenemos su precio teórico. Beta, rentabilidad exigida y valoración son tres formas de mirar lo mismo.

6. Empréstitos de obligaciones

Ejercicio 13

Fuente: Empréstito con amortización por partes iguales *Puntuación: 2 puntos*

Una empresa emite un empréstito de 5.000 obligaciones de 1.000 € de nominal, con un cupón anual del 4%, que amortizará a la par en 5 años por sorteo, en partes iguales (el mismo número de títulos cada año).

a) ¿Cuántos títulos se amortizan cada año?

b) Elabore el cuadro de la anualidad (intereses + amortización) de los 5 años.

Solución

a) Títulos amortizados por año

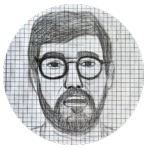
$5.000/5 = 1.000$ obligaciones al año (es decir, 1.000.000 € de nominal anual).

b) Cuadro de anualidades

Cada año se pagan los intereses de las obligaciones *vivas* (al 4% sobre su nominal) más la amortización de 1.000 títulos:

Año	Títulos vivos	Intereses (€)	Anualidad (€)
1	5.000	200.000	1.200.000
2	4.000	160.000	1.160.000
3	3.000	120.000	1.120.000
4	2.000	80.000	1.080.000
5	1.000	40.000	1.040.000

Resultado. Amortización constante (1.000.000/año) e intereses decrecientes: la anualidad baja de 1.200.000 a 1.040.000 €.



La intuición

Un empréstito es un préstamo "troceado" en muchos títulos para colocarlo entre miles de inversores. Con amortización por partes iguales, la lógica es la misma que un préstamo de cuota de amortización constante: cada año se devuelve el mismo principal y se pagan intereses solo sobre lo que queda vivo, así que la carga total va bajando. Es el método más sencillo de explicar en clase; en la práctica también se usa la anualidad constante, que reparte el esfuerzo de forma uniforme amortizando un número creciente de títulos cada año.

7. Préstamo con periodo de carencia

Ejercicio 14

Fuente: Carencia de capital y amortización francesa *Puntuación: 2 puntos*

Una empresa obtiene un préstamo de 120.000 € al 10% anual, a devolver en 5 años, con los 2 primeros de carencia de capital (solo se pagan intereses) y los 3 restantes por el sistema francés.

a) ¿Qué se paga durante los años de carencia?

b) Calcule la cuota de los años 3 a 5.

Solución

a) Años de carencia

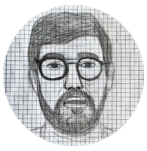
Durante la carencia de capital no se amortiza principal; solo se pagan los intereses del año: $120.000 \cdot 0{,}10 = 12.000$ € en cada uno de los años 1 y 2. La deuda sigue siendo 120.000 al iniciarse el año 3.

b) Cuota francesa (años 3 a 5)

Se amortizan los 120.000 € en 3 años por el sistema francés:

$$a = 120.000 \cdot \frac{0{,}10}{1 - 1{,}10^{-3}} = 120.000 \cdot 0{,}402115 = 48.253{,}78 \text{ €}.$$

Resultado. Años 1–2: 12.000 € de intereses. Años 3–5: cuota constante de 48.253,78 €.



La intuición

La carencia es un respiro inicial: muy útil, por ejemplo, cuando una inversión todavía no genera ingresos. Conviene distinguir dos tipos. En la carencia de capital (la de aquí) se pagan intereses pero no se amortiza, así que la deuda no baja pero tampoco crece. En la carencia total no se paga nada y los intereses se acumulan al principal, de modo que la deuda aumenta *durante la carencia. En ambos casos, el precio del respiro es una cuota más alta después: aquí, concentrar la devolución en solo 3 años dispara la cuota.*

8. Tantos equivalentes y TAE

Ejercicio 15

Fuente: Tipos nominal y efectivo *Puntuación: 1,5 puntos*

a) Un banco ofrece un depósito a un tipo nominal anual del 12% con capitalización mensual. Calcule la TAE.

b) Obtenga el tanto mensual equivalente.

c) Otro banco ofrece un 12,3% anual efectivo. ¿Qué oferta es mejor?

Solución

a) TAE

El tipo mensual es $0{,}12/12 = 1\%$. La TAE capitaliza esos doce subperiodos:

$$TAE = \left(1 + \tfrac{0{,}12}{12}\right)^{12} - 1 = 1{,}01^{12} - 1 = 12{,}68\%.$$

Resultado. $TAE = 12{,}68\%$ (mayor que el 12% nominal por el efecto del interés compuesto dentro del año).

b) Tanto mensual equivalente

Es directamente el 1% mensual: $(1 + 0{,}01)^{12} - 1 = 12{,}68\%$ confirma la equivalencia.

Resultado. Tanto mensual equivalente $= 1\%$.

c) Comparación de ofertas

La primera oferta equivale a una TAE del 12,68%, superior al 12,3% efectivo de la segunda.

Resultado. Es mejor el depósito al 12% nominal mensual (12,68% TAE) que el del 12,3% anual.



La intuición

Aquí está la trampa de muchos anuncios financieros: el tipo nominal y el efectivo no son lo mismo. Si los intereses se liquidan varias veces al año, dentro del propio año generan intereses sobre intereses, y por eso la TAE supera al nominal. La TAE es la herramienta que iguala el terreno de juego: convierte cualquier oferta —mensual, trimestral, con comisiones— a un único tipo anual efectivo, y permite comparar manzanas con manzanas. La regla para el opositor (y para el consumidor): para comparar productos financieros, mira siempre la TAE, nunca el tipo nominal.