Formulario Ecorami

Bloque 3 · Matemáticas Financieras

Capitalización y descuento, rentas, préstamos, empréstitos, valoración de activos, renta fija y carteras · Material de autoestudio para la oposición 590

Mapa del bloque: qué cae en la oposición

Tema	Prioridad	Cómo aparece en el examen
Préstamo francés y cuadro de amortización	★★★	Cuota, intereses, capital vivo; carencia; coste efectivo (Madrid 2023)
Rentas y planes de ahorro	★★★	Valor actual y final, prepagables, diferidas, crecientes (Madrid 2023)
Valoración de acciones: Gordon y CAPM	★★★	$P = D_1/(k-g)$ con k del CAPM (Madrid 2023)
Tantos equivalentes y TAE	★★	Nominal frente a efectivo, TAE con comisiones
Bonos: precio, TIR y duración	★★	Valor actual de los flujos, sensibilidad a los tipos
Carteras y CAPM	★★	Rentabilidad y riesgo de dos activos, beta, SML
Empréstitos	★	Anualidad con amortización por sorteo o partes iguales
Descuento comercial	★	Efectivo de una letra, coste del descuento

1. Capitalización y descuento

Capitalización compuesta y tantos equivalentes ★★

$$C_n = C_0(1+i)^n; \qquad C_0 = C_n(1+i)^{-n}; \qquad (1+i) = \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m$$

Qué es: el dinero de hoy y el de mañana no son comparables: capitalizar lleva un capital hacia delante acumulando intereses sobre intereses; descontar lo trae hacia atrás.

Dónde: C_0 capital inicial; C_n capital final; i tipo efectivo anual; j_m tipo nominal capitalizable m veces al año; $i_m = j_m/m$ tipo efectivo del subperiodo.

Sirve para: trasladar cualquier capital a cualquier fecha (equivalencia financiera) y convertir tipos: $TAE = (1+j_m/m)^m - 1$ es el efectivo anual de un nominal.

Ejemplo rápido: 6% nominal mensual: $i_{12} = 0{,}5\%$ y $TAE = 1{,}005^{12} - 1 = 6{,}17\%$. 1.000 € a 3 años al 4%: $1.000 \cdot 1{,}04^3 = 1.124{,}86$.

Ojo (trampa de examen): el tipo y el periodo deben ir en la misma unidad: con cuotas mensuales usa i_{12} y n en meses. La TAE legal incluye comisiones: se calcula como la TIR de los flujos reales.

Capitalización simple y descuento comercial ★

$$C_n = C_0(1+i\cdot n); \qquad D_c = N\,d\,t, \quad E = N(1-d\,t); \qquad D_r = N\left(1-\frac{1}{1+i\,t}\right)$$

Qué es: a corto plazo los intereses no se acumulan (simple). El descuento comercial calcula

el interés sobre el nominal; el racional, sobre el efectivo.

Dónde: N nominal del efecto; d tipo de descuento; t tiempo hasta el vencimiento (en años); E efectivo recibido.

Sirve para: letras y pagarés anticipados por el banco; comparar el coste real del descuento comercial, que es mayor que d porque se cobra por adelantado: $i_{\text{efectivo}} = \dfrac{d}{1-d\,t}$.

Ejemplo rápido: letra de 10.000 a 90 días al 6%: $D = 10.000 \cdot 0{,}06 \cdot 90/360 = 150$; $E = 9.850$; coste efectivo anual $= (10.000/9.850)^{360/90} - 1 = 6{,}2\%$.

Ojo (trampa de examen): año comercial de 360 días salvo que el enunciado diga otra cosa. El descuento comercial de un año entero al $d = 100\%$ daría efectivo cero: por eso solo tiene sentido a corto plazo.

2. Rentas financieras

Renta constante: valor actual y valor final ★★★

▶ **Derivación**

Suma de una progresión geométrica de razón $(1+i)^{-1}$: $a_{\overline{n}|i} = \sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

$$VA = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a\,a_{\overline{n}|i}; \qquad VF = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = a\,s_{\overline{n}|i}; \qquad VF = VA\,(1+i)^n$$

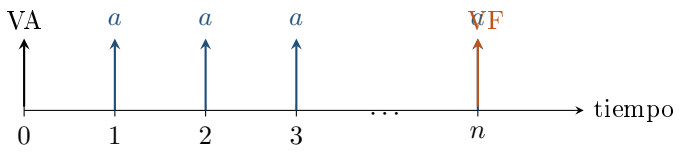
Qué es: el valor hoy (o al final) de una sucesión de pagos iguales a intervalos regulares.

Dónde: a término; i tipo del periodo; n número de términos. Pospagable: pagos al final de cada periodo (la fórmula básica). Prepagable: al principio, se multiplica por $(1+i)$. Perpetua: $VA = a/i$.

Sirve para: cuotas de préstamos, alquileres, pensiones, planes de ahorro (valor final), valoración de activos sin vencimiento (perpetua).

Ejemplo rápido: 12 aportaciones anuales de 1.000 al 3%: $VF = 1.000 \cdot \frac{1{,}03^{12}-1}{0{,}03} = 14.192$; si son prepagables, $14.192 \cdot 1{,}03 = 14.618$.

Ojo (trampa de examen): el valor actual de una pospagable está un periodo *antes* del primer pago; el de una prepagable, en el momento del primer pago. En las diferidas, descuenta además los d periodos de carencia: $VA = a\,a_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d}$.



Cómo leerlo: cada término a se descuenta al momento 0 (dividiendo por $(1+i)^t$) para el valor actual, o se capitaliza hasta n para el valor final. La primera flecha está en $t = 1$: renta pospagable.

Rentas variables: geométrica y aritmética ★★

$$VA_{\text{geom}} = a_1 \frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}\ (i \neq g); \qquad VA_{\text{perp. geom}} = \frac{a_1}{i-g}\ (i > g)$$

$$VA_{\text{arit}} = \left(a + \frac{h}{i} + h\,n\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{h\,n}{i}$$

Qué es: rentas cuyos términos crecen un porcentaje fijo g (geométrica) o una cantidad fija h (aritmética) cada periodo.

Dónde: a_1 primer término; g razón de crecimiento; h diferencia constante; i tipo.

Sirve para: planes de ahorro con aportaciones crecientes con la inflación, pensiones revalorizadas, dividendos crecientes (Gordon es la perpetua geométrica).

Ejemplo rápido: primer pago 1.000, crece un 2% anual, 10 años al 5%: $VA = 1.000 \cdot \frac{1-(1{,}02/1{,}05)^{10}}{0{,}03} = 8.388$.

Ojo (trampa de examen): si $i = g$ la fórmula geométrica se indetermina: entonces $VA = n\,a_1/(1+i)$. En la perpetua hace falta $i > g$; si no, el valor es infinito.

3. Préstamos

Sistema francés: cuota constante y cuadro de amortización ★★★

▶ **Derivación**

La cuota iguala el valor actual de las n cuotas al capital: $C_0 = a\,a_{\overline{n}|i}$.

$$a = C_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}; \qquad I_t = i\,C_{t-1}; \qquad A_t = a - I_t = A_1(1+i)^{t-1}$$

$$C_t = C_{t-1} - A_t = a\,a_{\overline{n-t}|i} \qquad \text{(capital vivo = valor actual de las cuotas pendientes)}$$

Qué es: el préstamo más habitual: cuota fija, con intereses decrecientes (se calculan sobre el capital vivo) y amortización creciente en progresión geométrica.

Dónde: C_0 principal; a cuota; I_t intereses del periodo t; A_t cuota de amortización; C_t capital vivo tras pagar la cuota t.

Sirve para: construir el cuadro (cuota, intereses, amortización, capital vivo), hallar el capital pendiente en cualquier momento y separar la deuda a corto y largo plazo en balance.

Ejemplo rápido: 60.000 al 4% en 3 años: $a = 60.000 \cdot 0{,}04/(1-1{,}04^{-3}) = 21.620{,}91$; $I_1 = 2.400$; $A_1 = 19.220{,}91$; $C_1 = 40.779{,}09$. Comprobación: $A_1 + A_2 + A_3 = C_0$.

Ojo (trampa de examen): con cuotas mensuales el tipo es el mensual ($j_{12}/12$ o $(1+i)^{1/12}-1$ según diga el enunciado) y n en meses. El total de intereses es $n\,a - C_0$. Capital vivo $\neq$ suma de cuotas pendientes.



Cómo leerlo: la cuota a es constante, pero su composición cambia: los intereses (sobre el capital vivo) decrecen y la amortización crece periodo a periodo.

Otros sistemas, carencia y coste efectivo ★★

$$\text{Americano: } I_t = C_0\, i,\ C_0 \text{ al final;} \qquad \text{Italiano: } A_t = \frac{C_0}{n},\ a_t = \frac{C_0}{n} + i\, C_{t-1}$$

$$\text{Carencia total de } d \text{ periodos: } C_d = C_0(1+i)^d, \text{ después francés con } n-d \text{ cuotas}$$

Qué es: alternativas al francés: solo intereses y principal al final (americano), amortización constante y cuota decreciente (italiano); la carencia aplaza la amortización (parcial: se pagan intereses) o todo (total: los intereses se capitalizan).

Dónde: d periodos de carencia; C_d capital a amortizar al terminar la carencia; en el americano puede haber un fondo de amortización ($s_{\overline{n}|i'}$).

Sirve para: comparar cuánto se paga en total y cuándo; con carencia, la cuota francesa posterior se calcula sobre C_d y $n-d$ periodos.

Ejemplo rápido: 60.000 al 4%, 1 año de carencia total y 3 cuotas: $C_1 = 62.400$; $a = 62.400 \cdot 0{,}04/(1-1{,}04^{-3}) = 22.485{,}75$.

Ojo (trampa de examen): el coste efectivo (TAE) del préstamo es la TIR de lo que recibes neto de comisiones frente a lo que pagas; con comisión de apertura la TAE supera al tipo de interés aunque el tipo sea fijo.

4. Empréstitos de obligaciones

Empréstito con amortización por partes iguales ★

$$\text{Anualidad}_t = \underbrace{N_{t-1}\, C\, i}_{\text{cupones}} + \underbrace{\frac{N}{n}\, C}_{\text{amortización}} \quad ; \qquad N_t = N_{t-1} - \frac{N}{n}$$

Qué es: un préstamo troceado en títulos: cada año se pagan los cupones de los títulos vivos y se amortiza (por sorteo) un número fijo de títulos.

Dónde: N títulos emitidos; N_t títulos vivos tras el año t; C nominal; i cupón; n años.

Sirve para: el cuadro del empréstito: amortización constante en títulos, cupones decrecientes, anualidad decreciente. Con prima de reembolso o emisión bajo la par, el coste efectivo para el emisor (TIE) supera al cupón.

Ejemplo rápido: 1.000 títulos de 100 al 5% a 4 años: año 1 cupones 5.000 + amortización

$25.000 = 30.000$; año 2: $3.750 + 25.000$.

Ojo (trampa de examen): en el empréstito *francés* (anualidad constante) el número de títulos amortizados crece en progresión geométrica y hay que redondear; en el examen suele pedirse el de partes iguales.

5. Valoración de activos financieros

Gordon-Shapiro, CAPM y PER ★★★

▶ **Derivación de Gordon**

Precio = valor actual de los dividendos; con crecimiento constante es una perpetua geométrica: $P_0 = \sum_{t\geq 1} \frac{D_1(1+g)^{t-1}}{(1+k)^t} = \frac{D_1}{k-g}$.

$$P_0 = \frac{D_1}{k-g} = \frac{D_0(1+g)}{k-g}; \qquad k = r_f + \beta\left(E[r_M] - r_f\right)$$

$$PER = \frac{P}{BPA}; \qquad g = ROE \cdot b; \qquad \text{rentabilidad del accionista} = \frac{D_1}{P_0} + g$$

Qué es: el valor de una acción es lo que valen hoy sus dividendos futuros; la rentabilidad que se le exige depende de su riesgo sistemático (CAPM); el PER compara precio y beneficio.

Dónde: D_1 dividendo del próximo año; k rentabilidad exigida; g crecimiento; r_f tipo sin riesgo; β beta; $E[r_M] - r_f$ prima de riesgo del mercado; b tasa de retención de beneficios.

Sirve para: valorar una acción (Madrid 2023), decidir si está cara o barata frente a su cotización, y encadenar: el CAPM da k, Gordon da el precio.

Ejemplo rápido: $D_0 = 2$, $g = 3\%$, $r_f = 2\%$, prima 5%, $\beta = 1{,}2$: $k = 8\%$; $P_0 = 2{,}06/0{,}05 = 41{,}2$. Si cotiza a 38, está infravalorada.

Ojo (trampa de examen): usa D_1, no D_0: si dan el dividendo que se acaba de pagar, multiplica por $(1+g)$. Hace falta $k > g$. Con $g = 0$, $P = D/k$ (perpetua simple).

6. Renta fija

Precio de un bono, TIR, ETTI y duración ★★

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t} \text{ (TIR } r\text{)}; \qquad P = \sum_{t} \frac{F_t}{(1+r_t)^t} \text{ (ETTI)}$$

$$D = \frac{1}{P}\sum_{t} t\,\frac{F_t}{(1+r)^t}; \qquad \frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{D}{1+r}\,\Delta r$$

Qué es: el bono vale lo que valen hoy sus cupones y su nominal; la TIR es el tipo único que iguala precio y flujos; la duración es el vencimiento medio ponderado de los flujos y mide la sensibilidad al tipo.

Dónde: F_t flujo del año t (cupón $c \cdot N$ y, al final, $+N$); r TIR; r_t tipo cupón cero a plazo t (ETTI); D duración de Macaulay; $D/(1+r)$ duración modificada.

Sirve para: valorar bonos con ETTI, calcular su TIR, comparar sensibilidades (a más duración, más cae el precio si suben los tipos) e inmunizar carteras igualando duración y horizonte.

Ejemplo rápido: bono a 3 años, cupón 5%, nominal 100, $r = 4\%$: $P = 5/1{,}04 + 5/1{,}04^2 + 105/1{,}04^3 = 102{,}78$ (sobre la par porque cupón > TIR); $D \approx 2{,}86$ años.

Ojo (trampa de examen): cupón > TIR ⇒ precio > nominal, y al revés. Un bono cupón cero tiene duración igual a su vencimiento. La relación precio-tipo es convexa: la aproximación lineal con la duración sobrestima las caídas y subestima las subidas.

7. Carteras y CAPM

Cartera de dos activos (Markowitz) y recta del mercado de capitales ★★

$$E[r_p] = w\,E[r_1] + (1-w)E[r_2]; \qquad \sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$w^*_{\min} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}; \qquad \text{CML: } E[r_p] = r_f + \frac{E[r_M] - r_f}{\sigma_M}\,\sigma_p$$

Qué es: combinar activos reduce el riesgo si no están perfectamente correlacionados; la frontera eficiente es el conjunto de carteras con máxima rentabilidad para cada riesgo.

Dónde: w peso del activo 1; ρ correlación; σ desviación típica; la pendiente de la CML es el ratio de Sharpe de la cartera de mercado.

Sirve para: calcular rentabilidad y riesgo de una cartera, la de mínima varianza, y mezclar la cartera de mercado con el activo sin riesgo (prestar o endeudarse) a lo largo de la CML.

Ejemplo rápido: $E_1 = 10\%$, $\sigma_1 = 20\%$; $E_2 = 6\%$, $\sigma_2 = 10\%$; $\rho = 0$; $w = 0{,}5$: $E_p = 8\%$, $\sigma_p = \sqrt{0{,}01 + 0{,}0025} = 11{,}2\%$ (menos que la media de los riesgos).

Ojo (trampa de examen): con $\rho = 1$ no hay diversificación (σ_p es la media ponderada); con $\rho = -1$ se puede anular el riesgo. La varianza no es lineal en los pesos: no promedies desviaciones típicas.

CAPM: beta y línea del mercado de valores ★★

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} = \rho_{iM}\frac{\sigma_i}{\sigma_M}; \qquad E[r_i] = r_f + \beta_i\,(E[r_M] - r_f); \qquad \beta_p = \sum w_i\beta_i$$

Qué es: en equilibrio solo se remunera el riesgo sistemático (no diversificable), medido por la beta; la SML relaciona linealmente rentabilidad esperada y beta.

Dónde: $\beta_M = 1$; $\beta > 1$ activo agresivo; $\beta < 1$ defensivo; α de Jensen = rentabilidad real − la que predice la SML.

Sirve para: obtener la rentabilidad exigida (k de Gordon, coste de los fondos propios del WACC), detectar activos infravalorados (por encima de la SML) y calcular la beta de una cartera.

Ejemplo rápido: $r_f = 3\%$, $E[r_M] = 9\%$, $\beta = 1{,}5$: $E[r] = 3 + 1{,}5 \cdot 6 = 12\%$. Si el activo ofrece 14%, $\alpha = +2\%$: comprar.

Ojo (trampa de examen): la prima de riesgo del mercado es $E[r_M] - r_f$, no $E[r_M]$. La SML se dibuja en el plano (beta, rentabilidad); la CML en (desviación típica, rentabilidad): no las confundas.

Chuleta de Matemáticas Financieras

Concepto	Fórmula	Cuándo
Compuesta / TAE	$C_n = C_0(1+i)^n$; $TAE = (1+j_m/m)^m - 1$	trasladar capitales
Descuento comercial	$E = N(1-dt)$	letras
Renta pospagable	$VA = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$; $VF = a\frac{(1+i)^n-1}{i}$	cuotas, ahorro
Prepagable / perpetua / diferida	$\times(1+i)$ / a/i / $\times(1+i)^{-d}$	variantes
Geométrica	$a_1\frac{1-((1+g)/(1+i))^n}{i-g}$	crecimiento g
Francés	$a = C_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$; $I_t = iC_{t-1}$; $A_t = a - I_t$	cuadro
Capital vivo	$C_t = a\,a_{\overline{n-t}\|i}$	balance c/p–l/p
Gordon	$P_0 = D_1/(k-g)$	acciones
CAPM	$k = r_f + \beta(E[r_M] - r_f)$	k exigida
Bono	$P = \sum F_t(1+r)^{-t}$; $\Delta P/P \approx -D\,\Delta r/(1+r)$	renta fija
Cartera	$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2$	diversificación

Compruébate

1. ¿Qué TAE corresponde a un 6% nominal capitalizable trimestralmente?
2. Préstamo de 100.000 al 5% a 10 años (francés): ¿cuota anual e intereses del primer año?
3. ¿Cuánto hay que ahorrar al final de cada año, al 3%, para tener 50.000 dentro de 15 años?
4. Acción con $D_0 = 1{,}50$, $g = 2\%$, $r_f = 3\%$, prima de mercado 5%, $\beta = 0{,}8$: ¿precio?
5. Bono cupón cero a 5 años, nominal 1.000, $r = 4\%$: ¿precio y duración?

Respuestas: (1) $(1+0{,}015)^4 - 1 = 6{,}14\%$. (2) $a = 100.000 \cdot 0{,}05/(1-1{,}05^{-10}) = 12.950{,}46$; $I_1 = 5.000$. (3) $a = 50.000 \cdot 0{,}03/(1{,}03^{15}-1) = 2.688{,}33$. (4) $k = 3 + 0{,}8\cdot 5 = 7\%$; $P = 1{,}53/0{,}05 = 30{,}6$. (5) $P = 1.000/1{,}04^5 = 821{,}93$; $D = 5$ años.