PLANTILLA · SISTEMAS CON PARÁMETRO: DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN

Ejercicio: _____ Parámetro: _____ Incógnitas: _____

Siete pasos. La pregunta que ordena todo es **cuánto valen los dos rangos**, el de la matriz de coeficientes A y el de la ampliada A^*, para cada valor del parámetro. El teorema de Rouché-Frobenius hace el resto.

1 **Matrices**, con las incógnitas en el mismo orden y un 0 donde falte alguna.

$$A = \begin{pmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} __ & __ & __ & __ \\ __ & __ & __ & __ \\ __ & __ & __ & __ \end{array}\right)$$

2 **Determinante** con la regla de Sarrus, ordenado como polinomio en el parámetro.

$|A| = (_____) - (_____) = _____$

3 **Valores críticos.** $|A| = 0 \implies$ parámetro $=$ _____ y _____ (Comprobar sustituyendo en $|A|$.)

4 **Caso general** y **5** **cada valor crítico**: sustituir, menor de orden 2 no nulo y menor orlado.

Valor del parámetro	$\mathrm{rg}(A)$ y su menor	$\mathrm{rg}(A^*)$ y su menor	Tipo de sistema
distinto de ____ y ____	3, porque $\lvert A\rvert \neq 0$	3	compatible determinado
igual a _____			
igual a _____			

Teorema de Rouché-Frobenius (n = número de incógnitas)		
$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = n$ compatible determinado una solución	$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) < n$ compatible indeterminado infinitas soluciones	$\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A^*)$ incompatible ninguna solución

6 **Resolver** para el valor pedido: _____. Primero, decir qué tipo de sistema es: _____

Si es determinado, regla de Cramer: cada incógnita es el determinante con su columna cambiada por los términos independientes, entre $|A|$.

$|A| =$ _____ $\qquad x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{__}{__} \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{__}{__} \qquad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{__}{__}$

Si es indeterminado, se quita la ecuación que sobra, una incógnita pasa a ser λ y las otras se despejan:

$x =$ _____ $\qquad y =$ _____ $\qquad z = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$

Comprobación en una ecuación: _____

7 **Frases.** *«El sistema tiene solución única si _____, infinitas soluciones si _____ y ninguna si _____».*

«Para _____ la solución del sistema es $x =$ _____, $y =$ _____, $z =$ _____».

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2025-26, EXTRAORDINARIA, 2.2 (2,5 PUNTOS)

$$\begin{cases} 3x + a\,y = 1 \\ 2x - y + a\,z = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.
b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

1 **Matrices.** $A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & a & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$

2 **Determinante.** $|A| = (-6 + a^2 + 0) - (0 - 9a + 4a) = a^2 + 5a - 6$

3 **Valores críticos.** $a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \dfrac{-5 \pm 7}{2} \Rightarrow a = 1$ o $a = -6$

4 **5** **Discusión.**

Valor de a	$\mathrm{rg}(A)$ y su menor	$\mathrm{rg}(A^*)$ y su menor	Tipo de sistema
$a \neq 1$ y $a \neq -6$	3, porque $\lvert A\rvert \neq 0$	3	**compatible determinado**
$a = 1$	2: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$	2: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$	**compatible indeterminado**
$a = -6$	2: $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$	3: $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$	**incompatible**

6 **Resolver para $a = 3$.** Como $3 \neq 1$ y $3 \neq -6$, el sistema es compatible determinado, con $|A| = 9 + 15 - 6 = 18$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = \frac{-4}{18} = -\frac{2}{9} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{18} = \frac{-2}{18} = -\frac{1}{9}$$

Comprobación en la primera ecuación: $3 \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{15}{9} - \frac{6}{9} = 1$.

7 *«El sistema tiene solución única si $a \neq 1$ y $a \neq -6$, infinitas soluciones si $a = 1$ y ninguna si $a = -6$. Para $a = 3$ la solución del sistema es $\boldsymbol{x = \frac{5}{9}}$, $\boldsymbol{y = -\frac{2}{9}}$, $\boldsymbol{z = -\frac{1}{9}}$».*

GLOSARIO

Parámetro. Letra que representa un número fijo sin concretar. El sistema cambia según el valor que tome.

Discutir un sistema. Decir, para cada valor del parámetro, si tiene una solución, infinitas o ninguna, y justificarlo.

Matriz de coeficientes (A). La formada por los números que multiplican a las incógnitas.

Matriz ampliada (A^*). La de coeficientes con una columna más, la de los términos independientes.

Menor. Determinante de una submatriz cuadrada, que se obtiene eligiendo algunas filas y columnas.

Rango. Orden del mayor menor distinto de cero. Indica cuántas ecuaciones aportan información nueva.

Orlar un menor. Añadirle una fila y una columna más para formar un menor de un orden superior.

Valores críticos. Valores del parámetro que anulan el determinante de A. En ellos el rango baja y hay que estudiarlos aparte.

Teorema de Rouché-Frobenius. El sistema tiene solución cuando $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$. Si ese rango es igual al número de incógnitas, la solución es única.

Compatible determinado. Sistema con una única solución.

Compatible indeterminado. Sistema con infinitas soluciones, que se escriben con un parámetro λ.

Incompatible. Sistema sin solución: sus ecuaciones se contradicen.

Regla de Cramer. En un sistema compatible determinado, cada incógnita es un cociente de determinantes: arriba, el de A con su columna cambiada por los términos independientes; abajo, $|A|$.