PLANTILLA · PROGRAMACIÓN LINEAL CON REGIÓN FACTIBLE

Ejercicio: _____ Se quiere maximizar / minimizar: _____

Siete pasos. Tres preguntas ordenan el planteamiento: **¿qué decido?** (variables), **¿qué me limita?** (restricciones) y **¿qué quiero conseguir?** (función objetivo). El óptimo está siempre en un **vértice** de la región factible.

1 **Variables.** $x =$ _____ $y =$ _____

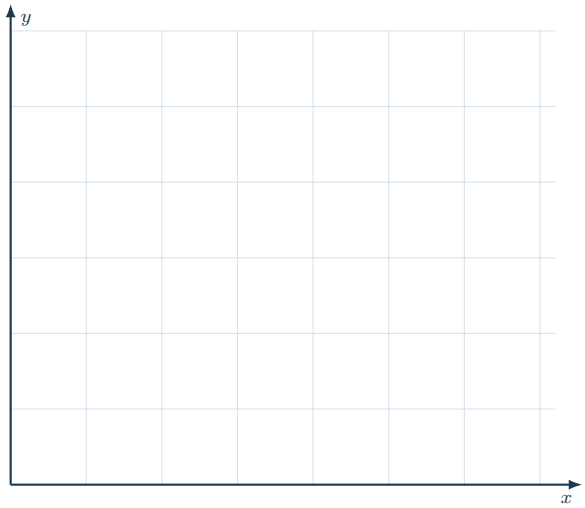
2 **Función objetivo.** Maximizar / minimizar $F(x, y) =$ _____ $x +$ _____ y (unidades: _____)

3 **Restricciones.** Una por frase; cada una se prueba con un ejemplo numérico.

Frase del enunciado	Desigualdad	Corte eje x	Corte eje y

«se dispone de», «como máximo» $\rightarrow \leq$ «al menos», «como mínimo» $\rightarrow \geq$ «al menos el doble de A que de B» $\rightarrow A \geq 2B$

4 **Región factible.** Cada recta con dos puntos; el lado válido, con un punto de prueba. Se sombrea la zona que cumple todo y se rotulan los vértices.



5 **Vértices** (cada uno, un sistema de dos rectas).

	Rectas que se cortan	Punto
A		
B		
C		
D		
E		

Un corte solo es vértice si cumple las demás restricciones.

6 **Valor de F en cada vértice.**

$F(A) =$ _____ $F(B) =$ _____ $F(C) =$ _____

$F(D) =$ _____ $F(E) =$ _____

7 **Frase de conclusión**, con cantidades y unidades.

«El _____ *máximo (mínimo) es de* _____ _____ *y se alcanza con* _____ _____ *y* _____ _____*».* Comprobación: el punto óptimo cumple todas las restricciones.

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2023-24, ORDINARIA, EJERCICIO 5 (2 PUNTOS)

Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas de 4 gramos y de 3 gramos. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos da un beneficio de 1,5 euros y cada una de 3 gramos, de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

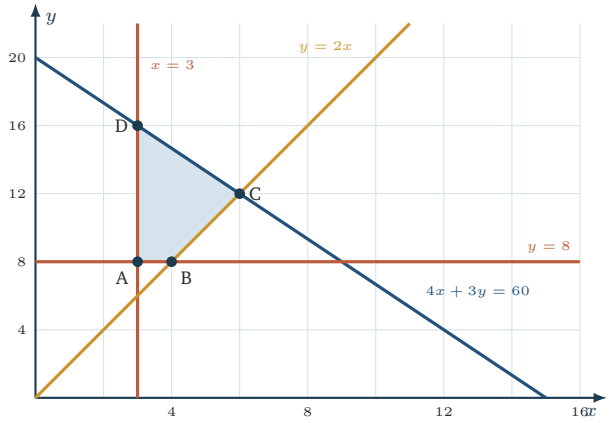
1 **Variables.** $x =$ número de tabletas de 4 g; $y =$ número de tabletas de 3 g.

2 **Función objetivo.** Maximizar $B(x, y) = 1{,}5x + y$ (euros).

3 **Restricciones.**

«60 gramos»	$4x + 3y \leq 60$
«al menos tres de 4 g»	$x \geq 3$
«al menos ocho de 3 g»	$y \geq 8$
«doble de 3 g que de 4 g»	$y \geq 2x$

4 **Región factible**



5 **Vértices.**

A: $x = 3$, $y = 8 \to (3, 8)$
B: $y = 8$, $y = 2x \to (4, 8)$
C: $y = 2x$, $4x + 3y = 60 \to 10x = 60 \to (6, 12)$
D: $x = 3$, $4x + 3y = 60 \to 3y = 48 \to (3, 16)$
El corte $(9, 8)$ no es vértice: incumple $y \geq 2x$.

6 **Valores.** $B(3, 8) = 12{,}5$ $B(4, 8) = 14$ $\boldsymbol{B(6, 12) = 21}$ $B(3, 16) = 20{,}5$.
Comprobación: $4 \cdot 6 + 3 \cdot 12 = 60$ gramos y $12 \geq 2 \cdot 6$.

7 **Frase.** *«El beneficio máximo es de 21 euros y se alcanza fabricando 6 tabletas de 4 gramos y 12 tabletas de 3 gramos».*

GLOSARIO

Programación lineal. Técnica para hallar el máximo o el mínimo de una función lineal cuando las variables están sujetas a desigualdades lineales.

Variables de decisión (x, y). Las cantidades que se pueden elegir. Se definen con una frase y sus unidades.

Función objetivo. La expresión que se quiere hacer máxima (beneficio, ingresos) o mínima (coste): $F(x, y) = ax + by$.

Restricción. Desigualdad que limita las variables: un recurso disponible, una cantidad mínima, una proporción.

Inecuación lineal. Desigualdad del tipo $ax + by \leq c$. Sus soluciones forman un semiplano.

Semiplano. Cada una de las dos mitades en que una recta divide al plano. Se decide cuál vale con un punto de prueba.

Punto de prueba. Punto que no está en la recta, a menudo $(0, 0)$, que se sustituye en la desigualdad para saber qué lado es el válido.

Región factible. Conjunto de puntos que cumplen todas las restricciones a la vez. Suele ser un polígono.

Vértice. Esquina de la región factible: corte de dos rectas que, además, cumple las demás restricciones.

Solución óptima. Punto de la región en el que la función objetivo alcanza su máximo o su mínimo. Si la región es un polígono, está en un vértice.

Recta de nivel. Recta $ax + by = k$ formada por los puntos en los que la función objetivo vale k. Al aumentar k se desplaza en paralelo.

Solución contextualizada. La respuesta dicha con las palabras del enunciado: cuánto de cada cosa y cuál es el valor óptimo, con sus unidades.