PLANTILLA · MATRICES: INVERSA Y ECUACIÓN MATRICIAL

Ejercicio: _____ Ecuación que hay que resolver: _____

Siete pasos. Con matrices no se divide: se **multiplica por la inversa**, que existe solo si el determinante es distinto de cero. El producto no es conmutativo, así que importa **por qué lado** se multiplica.

1 **Determinante** (regla de Sarrus: tres diagonales bajan y suman, tres suben y restan).

$|A| = (____ + ____ + ____) - (____ + ____ + ____) = ____$

2 **Criterio.** $|A| = ____ \neq 0$, *luego A es invertible.* (Si $|A| = 0$, la matriz no tiene inversa.)

3 **Matriz de adjuntos.** Para cada posición: tapar su fila y su columna, determinante de 2×2 y signo del tablero.

Tablero: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$ $\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} ____ & ____ & ____ \\ ____ & ____ & ____ \\ ____ & ____ & ____ \end{pmatrix}$

4 **Trasponer** (filas por columnas). **5** **Dividir entre el determinante.**

$(\operatorname{Adj} A)^t = \begin{pmatrix} ____ & ____ & ____ \\ ____ & ____ & ____ \\ ____ & ____ & ____ \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(\operatorname{Adj} A)^t = \begin{pmatrix} ____ & ____ & ____ \\ ____ & ____ & ____ \\ ____ & ____ & ____ \end{pmatrix}$

Comprobación: fila 1 de A por columna 1 de $A^{-1} = ____$ (tiene que dar 1); por columna 2 $= ____$ (tiene que dar 0).

6 **Despejar** multiplicando por la inversa por el mismo lado en los dos miembros.

Ecuación	Se multiplica	Solución
$A\,X = B$	por A^{-1} a la izquierda	$X = A^{-1}B$
$X\,A = B$	por A^{-1} a la derecha	$X = B\,A^{-1}$
$A\,X\,B = C$	por A^{-1} a la izquierda y B^{-1} a la derecha	$X = A^{-1}C\,B^{-1}$
$A\,X + B = C$	primero se pasa B restando	$X = A^{-1}(C - B)$

Mi despeje: _____ $\Longrightarrow$ $X =$ _____ Dimensiones: _____ $\times$ _____

7 **Resultado y frase.** $X =$ _____ Comprobación sustituyendo: _____

«A es invertible porque $|A| = ____ \neq 0$. La matriz pedida es $X = ____$».

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2022-23, ORDINARIA, A.1 (2 PUNTOS)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. a) Estudie si A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa. b) Determine la matriz X tal que $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. **Determinante.** $|A| = (1\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 0) - (1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot(-1)) = 1 - (-1) = 2$
2. **Criterio.** $|A| = 2 \neq 0$, luego A es invertible.
3. **Adjuntos.** Ejemplos: posición $(1,2)$: $-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; posición $(3,3)$: $+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3$.

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. $$(\operatorname{Adj} A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. $$A^{-1} = \frac{1}{2}(\operatorname{Adj} A)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Comprobación: fila 1 por columna 1, $\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$; fila 1 por columna 2, $\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$.

6. **Despejar.** $A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}\cdot A \cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$ (3×3 por 3×1 da 3×1).
7. **Resultado.** $$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$ Comprobación: $A\cdot X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2} \\ 1 + 0 + 0 \\ \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

«A es invertible porque $|A| = 2 \neq 0$. La matriz pedida es la matriz columna X de elementos $\frac{1}{2}$, 0 y $\frac{1}{2}$».

GLOSARIO

Matriz. Tabla de números ordenados en filas y columnas. Su dimensión se escribe filas × columnas.

Matriz cuadrada. La que tiene el mismo número de filas que de columnas. Solo ellas tienen determinante e inversa.

Producto de matrices. Cada elemento es una fila de la primera por una columna de la segunda. Solo se puede hacer si las columnas de la primera coinciden con las filas de la segunda. No es conmutativo: $AB \neq BA$.

Matriz identidad (I). Unos en la diagonal y ceros fuera. Es el «uno» del producto: $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Determinante ($|A|$). Número asociado a una matriz cuadrada. En 2×2 vale $ad - bc$; en 3×3 se calcula con la regla de Sarrus.

Regla de Sarrus. Tres productos en diagonal hacia abajo, que suman, menos tres productos en diagonal hacia arriba.

Matriz invertible o regular. La que tiene inversa. Lo es exactamente cuando su determinante es distinto de cero.

Matriz inversa (A^{-1}). La que cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Adjunto de un elemento. Determinante que queda al tapar su fila y su columna, con el signo del tablero (+ si fila más columna es par).

Matriz de adjuntos ($\operatorname{Adj} A$). La formada por los adjuntos de todos los elementos.

Matriz traspuesta (A^t). La que se obtiene cambiando filas por columnas.

Ecuación matricial. Ecuación en la que la incógnita es una matriz. Se despeja multiplicando por inversas, respetando el lado.