## PLANTILLA · INTEGRALES: PRIMITIVA CON CONDICIÓN Y ÁREA

Ejercicio: _____ Función: $f(x) =$ _____ Intervalo: _____

Siete pasos. Integrar es buscar la función cuya derivada es $f$: por eso toda primitiva se **comprueba derivando**. Antes de calcular un área hay que mirar si la curva **cruza el eje** dentro del intervalo.

**1** **Preparar.** Sin paréntesis y con cada término como potencia de $x$: $f(x) =$ _____

Reglas: $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $\int k\,dx = kx + C$; $\int e^{kx}\,dx = \dfrac{e^{kx}}{k} + C$; $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$; $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

**2** **Primitiva.** $F(x) = \int f(x)\,dx =$ _____ $+ C$

Comprobación derivando: $F'(x) =$ _____ $= f(x)$

**3** **Condiciones.** $F(____) =$ _____ $\Longrightarrow$ _____ $\Longrightarrow$ $C =$ _____

$F(____) =$ _____ $\Longrightarrow$ _____ $\Longrightarrow$ parámetro $=$ _____

Frase: *«El valor pedido es* _____ *y la primitiva es* $F(x) =$ _____*»*.

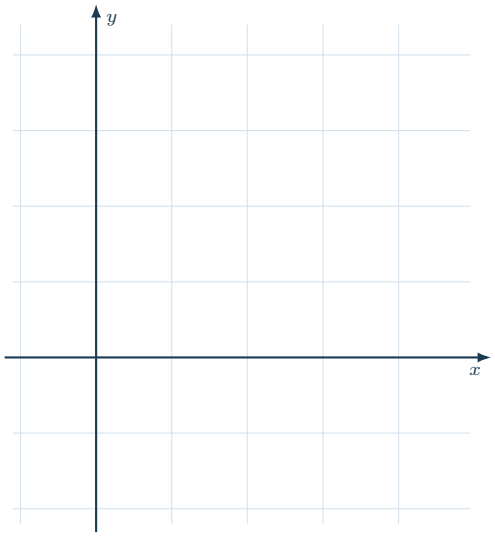
**4** **Cortes y signo** entre $x = p$ y $x = q$.

$f(x) = 0 \Longrightarrow x =$ _____

Cortes dentro del intervalo: _____

Signo de $f$ en cada trozo: _____

**Esquema**: dibuja la curva y sombrea el recinto




**5** **Sin cambio de signo** (regla de Barrow).

Área $= \displaystyle\int_p^q f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_p^q = F(q) - F(p)$

$=$ _____ $-$ _____ $=$ _____ u$^2$

**6** **Con un corte en $c$:** un trozo a cada lado.

Área $= \left|\displaystyle\int_p^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^q f(x)\,dx\right|$

$=$ _____ $+$ _____ $=$ _____ u$^2$

**7** **Frase de conclusión.** *«El recinto delimitado por* _____*, el eje horizontal y las rectas* $x =$ _____ *y* $x =$ _____ *tiene un área de* _____ *unidades cuadradas»*.

## EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2024-25, EXTRAORDINARIA, 3.1 (2,5 PUNTOS)

$f(x) = x\,(x^2 + a)$, con $a > 0$. a) Valor de $a$ para que la primitiva $F(x)$ cumpla $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$ (1 punto). b) Para $a = \frac{3}{2}$, área del recinto delimitado por $f(x)$, el eje horizontal y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ (0,5 puntos). c) Valores de $a$ para que la pendiente de la tangente en $x = 1$ sea 1 (1 punto).

**1** **Preparar.** $f(x) = x\,(x^2 + a) = x^3 + a\,x$

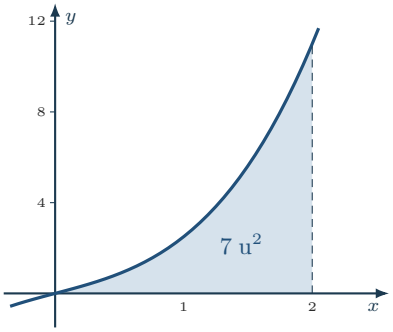
**2** **Primitiva.** $F(x) = \displaystyle\int (x^3 + a\,x)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{a\,x^2}{2} + C$

Comprobación: $F'(x) = x^3 + a\,x$.

**3** **Condiciones.** $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. $\quad F(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$.

*«El valor pedido es $a = \frac{3}{2}$ y la primitiva es $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4}$».*

**4** **Cortes y signo.** $f(x) = x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right)$ solo se anula en $x = 0$, y $f(x) \geq 0$ en $[0, 2]$: no cambia de signo.




**5** **Área (Barrow).** Área $= \displaystyle\int_0^2 \left(x^3 + \frac{3x}{2}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4}\right]_0^2 = (4 + 3) - 0 = \mathbf{7\ u^2}$

**6** **Si hubiera un corte.** Ejemplo (extraordinaria de 2026): $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ entre $x = 1$ y $x = 3$ se anula en $x = 2$. Con $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2$: $\displaystyle\int_1^2 f = -\frac{17}{4}$ y $\displaystyle\int_2^3 f = \frac{41}{4}$. Área $= \frac{17}{4} + \frac{41}{4} = \frac{29}{2}$ u$^2$ (la integral de 1 a 3 sin partir daría 6).

**7** **Frase.** *«El recinto delimitado por la gráfica de $f$, el eje horizontal y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ tiene un área de 7 unidades cuadradas».*

Apartado c): pendiente $= f'(1)$; $f'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow 3 + a = 1 \Rightarrow a = -2$ (resultado oficial; no cumple la condición $a > 0$ del enunciado).

## GLOSARIO

**Primitiva de $f$.** Función $F$ cuya derivada es $f$: $F'(x) = f(x)$. Si $F$ es una primitiva, también lo es $F(x) + C$ para cualquier número $C$.

**Integral indefinida, $\int f(x)\,dx$.** El conjunto de todas las primitivas de $f$. Se escribe una de ellas más la constante.

**Constante de integración ($C$).** Número que se suma a la primitiva. Se determina con una condición del tipo $F(0) = 0$.

**Parámetro.** Letra de valor desconocido que aparece en la función. Se halla con las condiciones del enunciado.

**Integral definida, $\int_p^q f(x)\,dx$.** Un número: lo que acumula $f$ entre $x = p$ y $x = q$. Cuenta en positivo lo que está sobre el eje y en negativo lo que está debajo.

**Límites de integración.** Los números $p$ y $q$ que aparecen abajo y arriba del símbolo de la integral.

**Regla de Barrow.** $\int_p^q f(x)\,dx = F(q) - F(p)$: la primitiva en el extremo superior menos la primitiva en el inferior.

**Recinto.** Región del plano encerrada entre la curva, el eje horizontal y dos rectas verticales (o entre dos curvas).

**Área.** Medida del recinto, siempre positiva. Coincide con la integral definida si $f \geq 0$; si la curva cruza el eje, se suman los trozos en valor absoluto.

**Corte con el eje.** Punto en el que $f(x) = 0$. Es donde la función puede cambiar de signo.

**Valor absoluto, $|\ |$.** El número sin su signo: $\left|-\frac{17}{4}\right| = \frac{17}{4}$.

**Unidades cuadradas (u$^2$).** Unidad en la que se expresa un área cuando los ejes no tienen unidades propias.

**Eje horizontal.** El eje de abscisas, o eje $OX$: la recta $y = 0$.