PLANTILLA · FUNCIÓN A TROZOS: CONTINUIDAD Y ASÍNTOTAS

Ejercicio: _____ Punto de cambio: $c =$ _____ Parámetro: _____

Siete pasos. La pregunta que ordena todo es **qué rama manda** en el sitio por el que preguntan: cada valor y cada límite se calcula con una sola fórmula, la de su zona. Cada asíntota se da con su ecuación y con el lado en el que está.

1 Zonas. Rama 1: $f(x) =$ _____ para x _____ Rama 2: $f(x) =$ _____ para x _____

El punto de cambio pertenece a la rama que lleva el signo «igual»: la rama _____.

2 Continuidad en el punto de cambio.

$f(c) =$ _____ $\lim_{x \to c^-} f(x) =$ _____ $\lim_{x \to c^+} f(x) =$ _____

3 Igualar. $f(c) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) \implies$ _____ $=$ _____ $=$ _____ $\implies$ parámetro $=$ _____

Frase: «*La función es continua en* $x =$ _____ *únicamente cuando* _____» (o «*no es continua, porque* _____»).

4 Dominio y asíntotas verticales. Cada denominador se iguala a cero y se mira su zona.

Rama 1: se anula en $x =$ _____; ¿está en su zona? _____ Rama 2: se anula en $x =$ _____; ¿está en su zona? _____

Si está: $\lim_{x \to k^-} f(x) =$ _____, $\lim_{x \to k^+} f(x) =$ _____ y la asíntota vertical es $x =$ _____.

Dominio: _____

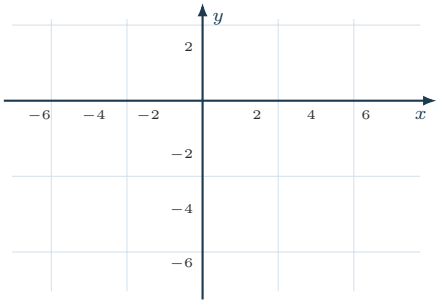
5 Asíntotas horizontales (cada infinito, con su rama).

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ _____ $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ _____

Regla de los grados para un cociente de polinomios:
grados iguales → cociente de los coeficientes principales;
más grado abajo → 0; más grado arriba → $\pm\infty$ (no hay horizontal).

Asíntota: $y =$ _____ cuando $x \to$ _____.

Esquema: dibuja las asíntotas con línea discontinua



6 Asíntota oblicua $y = mx + n$ (un grado más arriba).

$m = \lim \dfrac{f(x)}{x} =$ _____ $n = \lim \big(f(x) - mx\big) =$ _____

Asíntota: $y =$ _____ $x +$ _____ cuando $x \to$ _____.

7 Frase de conclusión. Si de algún tipo no hay, se dice y se justifica.

«*La función tiene* _____ *como asíntota vertical,* _____ *como horizontal cuando* $x \to$ _____ *y* _____ *como oblicua cuando* $x \to$ _____».

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2024-25, ORDINARIA, PREGUNTA 2.1 (2,5 PUNTOS)

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ si $x\le 0$; $f(x)=\dfrac{x+a}{x+1}$ si $x>0$, con $a\in\mathbb{R}$. a) Valor de a para que la función sea continua en $x=0$ (1 punto). b) Asíntotas de $f(x)$ (1,5 puntos).

1 **Zonas.** Rama 1 para $x\le 0$ (incluye el cero); rama 2 para $x>0$.

2 **Continuidad en $x=0$.**

$$f(0)=\frac{0^2+1}{0-1}=-1 \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x-1}=-1 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x+a}{x+1}=a$$

3 **Igualar.** $-1=-1=a \implies \boldsymbol{a=-1}$. *«La función es continua en $x=0$ únicamente cuando $a=-1$».*

4 **Verticales.** $x-1=0$ en $x=1$, que no cumple $x\le 0$; $x+1=0$ en $x=-1$, que no cumple $x>0$. Dominio: $\mathbb{R}$. **No hay asíntotas verticales.**

5 **Horizontales.** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+a}{x+1}=1$: $\boldsymbol{y=1}$ en $+\infty$.

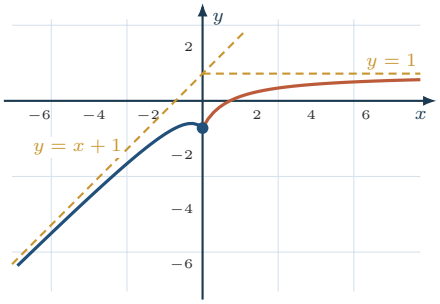
$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty$: no hay horizontal cuando $x\to-\infty$.

6 **Oblicua en $-\infty$.** $m=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-x}=1$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-(x^2-x)}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1.$$

Asíntota $\boldsymbol{y=x+1}$ cuando $x\to-\infty$. Comprobación: $f(x)-(x+1)=\dfrac{2}{x-1}\to 0$.

7 **Frase.** *«La función no tiene asíntotas verticales. Tiene una asíntota horizontal, $y=1$, cuando $x\to+\infty$, y una asíntota oblicua, $y=x+1$, cuando $x\to-\infty$».*



GLOSARIO

Función a trozos. Función definida con fórmulas distintas en zonas distintas de la recta. Cada fórmula es una rama.

Punto de cambio. Valor de x en el que se pasa de una rama a otra. Pertenece a la rama cuya condición lleva el signo «igual» ($\le$ o $\ge$).

Dominio. Conjunto de valores de x para los que la función está definida. En un cociente se excluyen los puntos que anulan el denominador, si están en la zona de esa rama.

Límites laterales. $\lim_{x\to c^-}$ es el valor al que se acerca la función cuando x se aproxima a c por la izquierda; $\lim_{x\to c^+}$, por la derecha.

Continuidad en un punto. f es continua en c si $f(c)$ y los dos límites laterales existen y valen lo mismo. Se dibuja sin levantar el lápiz.

Discontinuidad de salto. Los límites laterales son números distintos: la gráfica da un salto en c.

Parámetro. Letra (a, b, k) cuyo valor no se conoce. Se determina imponiendo la condición que pide el enunciado.

Asíntota. Recta a la que la gráfica se acerca cada vez más sin llegar a confundirse con ella.

Asíntota vertical ($x=k$). Aparece donde la función tiende a $\pm\infty$ al acercarse a k; en un cociente, donde se anula el denominador y no el numerador.

Asíntota horizontal ($y=k$). Aparece cuando el límite en $+\infty$ o en $-\infty$ es el número k.

Asíntota oblicua ($y=mx+n$). Recta inclinada a la que se acerca la función en el infinito. $m=\lim f(x)/x$ y $n=\lim\big(f(x)-mx\big)$. En un mismo lado no puede haber horizontal y oblicua.

Grado y coeficiente principal. El grado es el mayor exponente de un polinomio; el coeficiente principal es el número que acompaña a ese término.

Regla de los grados. En el infinito, un cociente de polinomios se comporta como el cociente de sus términos de mayor grado.