PLANTILLA · MONOTONÍA, EXTREMOS Y RECTA TANGENTE

Ejercicio: _____ Función: $f(x) =$ _____ Dominio: _____

Siete pasos. Todo sale de la derivada: su **valor** en un punto es la pendiente de la tangente, su **signo** dice si la función crece o decrece y sus **ceros** son los candidatos a extremo. El punto sale de f; la pendiente, de f'.

1 **Derivada.** $f'(x) =$ _____

Reglas: $(x^n)' = n\,x^{n-1}$; $(e^x)' = e^x$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

2 **Recta tangente en** $x_0 =$ _____.

Pendiente: $m = f'(x_0) =$ _____ $=$ _____ Punto: $f(x_0) =$ _____ $=$ _____

3 **Ecuación.** $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \implies y -$ _____ $=$ _____ $(x -$ _____$) \implies y =$ _____

Comprobación: en x_0 la recta da _____, igual que $f(x_0)$.

Frase: *«La recta tangente a la gráfica de f en el punto* (_____, _____) *es* $y =$ _____*»*.

4 **Puntos críticos.** $f'(x) = 0 \implies$ _____ $\implies x =$ _____, $x =$ _____

Sin término independiente se saca factor común. En un cociente se añaden a la recta los puntos que no están en el dominio.

5 **Recta de signos.** En cada intervalo: valor de prueba, signo de f' y flecha (↗ crece, ↘ decrece).

signo de $f'(x)$

$f'($____$) =$ _____ $f'($____$) =$ _____ $f'($____$) =$ _____



_____ _____ _____ _____

Crece en _____ Decrece en _____

6 **Clasificar.** De crecer a decrecer: **máximo relativo** en $x =$ _____, con $f($____$) =$ _____

De decrecer a crecer: **mínimo relativo** en $x =$ _____, con $f($____$) =$ _____

Comprobación con la segunda derivada: $f'' < 0$ en el máximo y $f'' > 0$ en el mínimo. $f''(x) =$ _____

7 **Frase de conclusión.** *«La función crece en* _____ *y decrece en* _____*;*

tiene un máximo relativo en el punto (_____, _____) *y un mínimo relativo en el punto* (_____, _____)*»*.

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2022-23, EXTRAORDINARIA, A.2 (2 PUNTOS)

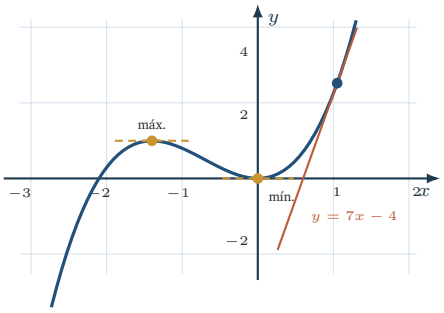
$f(x) = x^3 + 2x^2$. a) Ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. b) Extremos relativos de f, indicando si son máximos o mínimos.

1 **Derivada.** $f'(x) = 3x^2 + 4x$

2 **Tangente en** $x_0 = 1$**.** $m = f'(1) = 3 + 4 = 7$.
Punto: $f(1) = 1 + 2 = 3$, es decir, $(1, 3)$.

3 **Ecuación.** $y - 3 = 7\,(x - 1) \implies \boldsymbol{y = 7x - 4}$.
Comprobación: $7 \cdot 1 - 4 = 3$.
«La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 3)$ es $y = 7x - 4$».

4 **Puntos críticos.** $3x^2 + 4x = x\,(3x + 4) = 0 \implies x = 0$ o $x = -\frac{4}{3}$.



5 **Recta de signos.**

signo de $f'(x)$

$f'(-2) = 4 > 0$ ↗ crece | $-\frac{4}{3}$ | $f'(-1) = -1 < 0$ ↘ decrece | 0 | $f'(1) = 7 > 0$ ↗ crece

Crece en $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ y en $(0, +\infty)$; decrece en $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

6 **Clasificar.** En $x = -\frac{4}{3}$ pasa de crecer a decrecer: máximo relativo, con $f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27} + \frac{96}{27} = \frac{32}{27}$. En $x = 0$ pasa de decrecer a crecer: mínimo relativo, con $f(0) = 0$. Comprobación: $f''(x) = 6x + 4$; $f''\left(-\frac{4}{3}\right) = -4 < 0$ y $f''(0) = 4 > 0$.

7 **Frase.** *«La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$».*

GLOSARIO

Derivada en un punto, $f'(x_0)$. Pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa x_0. Mide lo deprisa que cambia la función en ese punto.

Función derivada, $f'(x)$. Función que da la derivada en cada punto. Se obtiene con las reglas de derivación.

Recta tangente. Recta que toca a la curva en un punto y tiene allí su misma inclinación: $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$.

Pendiente (m). Lo que sube la recta por cada unidad que avanza. Si es positiva la recta sube; si es negativa, baja; si es cero, es horizontal.

Abscisa y ordenada. La abscisa de un punto es su coordenada x; la ordenada, su coordenada $y = f(x)$.

Punto crítico. Punto en el que $f'(x) = 0$ (tangente horizontal). Es candidato a máximo o mínimo relativo.

Función creciente y decreciente. Crece en un intervalo si $f'(x) > 0$ en él; decrece si $f'(x) < 0$. Los intervalos se escriben abiertos.

Monotonía. Estudio de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función.

Recta de signos. Esquema con los puntos críticos sobre una recta y el signo de f' en cada intervalo, obtenido con un valor de prueba.

Máximo relativo. Punto en el que la función pasa de crecer a decrecer: está más alto que los puntos cercanos.

Mínimo relativo. Punto en el que la función pasa de decrecer a crecer: está más bajo que los puntos cercanos.

Extremos relativos. Nombre común de los máximos y los mínimos relativos.

Segunda derivada, $f''(x)$. Derivada de la derivada. En un punto crítico, $f'' < 0$ indica máximo y $f'' > 0$, mínimo.

Factor común. Sacar fuera de un paréntesis lo que se repite en todos los términos: $3x^2 + 4x = x\,(3x + 4)$.