PLANTILLA · INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA

Ejercicio: _____ Población: _____ Magnitud y unidades: _____

Siete pasos, siempre en este orden. Antes de empezar, decide si se estima una **media** (un precio, un peso, un tiempo) o una proporción (un porcentaje de individuos). Esta plantilla es la de la media. Cada apartado termina con una frase que responde a lo que se pide, con sus unidades.

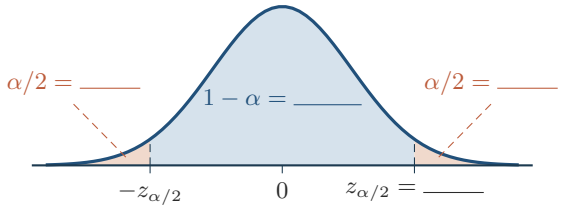
1 **Variable y distribución.** $X =$ _____ $X \sim N(\mu\,;\ \sigma =$ _____$)$

La desviación típica σ es la de la población y el enunciado la da como conocida.

2 **Datos de la muestra.** Tamaño: $n =$ _____ Media muestral: $\bar{x} =$ _____

Si el enunciado da el total de la muestra, la media es el total dividido entre n: $\bar{x} =$ _____ / _____ = _____.

3 **Valor crítico.** La tabla da el área acumulada hasta z; se busca dentro de ella el área $1-\alpha/2$ y se lee z en los márgenes.



$1-\alpha =$ _____ $\to\ \alpha =$ _____ $\to\ \alpha/2 =$ _____

$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2 =$ _____ $\to\ z_{\alpha/2} =$ _____

Confianza	Área $1-\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$
90 %	0,95	1,645
95 %	0,975	1,96
97,8 %	0,989	2,29
99 %	0,995	2,575

4 **Margen de error.** $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} =$ _____ $\cdot \dfrac{\quad}{\sqrt{\quad}} =$ _____ $\cdot$ _____ $=$ _____

El cociente $\sigma/\sqrt{n}$ es el error típico. El tamaño de la muestra entra con su raíz cuadrada.

5 **Intervalo.** $(\bar{x}-E\,;\ \bar{x}+E) =$ (_____ − _____ ; _____ + _____) = (_____ ; _____)

Comprobación: el punto medio del intervalo, (_____ + _____)/2 = _____, tiene que devolver $\bar{x}$.

6 **Frase de conclusión.** *«Con una confianza del* _____*%, la media de* _____ *está entre* _____ *y* _____ _____ *(unidades)».*

7 **Tamaño de la muestra** (cuando el enunciado fija el error máximo).

$E =$ _____ $\quad 1-\alpha =$ _____ $\to z_{\alpha/2} =$ _____ $\quad \sigma =$ _____

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Longrightarrow \quad n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{\quad \cdot \quad}{\quad}\right)^2 = \quad$$

Se redondea **siempre hacia arriba**: $n =$ _____.

Frase: *«Hay que tomar una muestra de al menos* _____ _____ *para estimar la media con un error máximo de* _____ *y un nivel de confianza del* _____*%».*

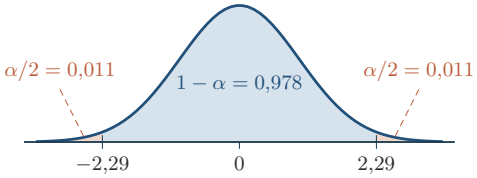
EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2025-26, EXTRAORDINARIA, PREGUNTA 1 (2,5 PUNTOS)

Estudio sobre las ventas de mochilas de una marca deportiva en los pequeños establecimientos de una gran ciudad. a) El precio de las mochilas sigue una distribución normal con desviación típica de 25 euros; en una muestra de 50 comercios el precio medio es de 43,55 euros. Se pide un intervalo de confianza al 97,8 % para la media. b) Número de comercios necesario para estimar la proporción de clientes que prefieren las mochilas impermeables con un error de muestreo inferior al 5 % y un nivel de confianza del 95 %, en el caso más conservador, $p = q = 0{,}5$.

1 **Variable.** $X =$ precio de una mochila, en euros; $X \sim N(\mu\,;\,\sigma = 25)$ **2** **Datos.** $n = 50$, $\bar{x} = 43{,}55$ €

3 **Valor crítico.**

$1 - \alpha = 0{,}978 \;\to\; \alpha = 0{,}022 \;\to\; \alpha/2 = 0{,}011$
$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - 0{,}011 = 0{,}989$
En la tabla, 0,9890 está en la fila 2,2 y la columna 0,09: $\boldsymbol{z_{\alpha/2} = 2{,}29}$



4 **Margen de error.** $E = 2{,}29 \cdot \dfrac{25}{\sqrt{50}} = 2{,}29 \cdot \dfrac{25}{7{,}0711} = 2{,}29 \cdot 3{,}5355 = 8{,}096$ €

5 **Intervalo.** $(43{,}55 - 8{,}096\;;\; 43{,}55 + 8{,}096) = \boldsymbol{(35{,}454\;;\;51{,}646)}$ Punto medio: $(35{,}454 + 51{,}646)/2 = 43{,}55$.

6 **Frase.** *«Con una confianza del 97,8 %, el precio medio de venta de estas mochilas en los pequeños establecimientos de la ciudad está entre 35,45 y 51,65 euros».*

7 **Tamaño de la muestra** (apartado b, de proporción). $E = 0{,}05$; $p = q = 0{,}5$; confianza del 95 %: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\,q}{n}} \implies n \ge \frac{z_{\alpha/2}^2\,p\,q}{E^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}05^2} = 384{,}16 \implies \boldsymbol{n = 385}$$ (con 384 el error sería 0,05001).

«Se necesita una muestra de al menos 385 comercios para estimar la proporción de clientes que prefieren las mochilas impermeables con un error de muestreo inferior al 5 % y un nivel de confianza del 95 %».

Con una media, la misma idea da $n \ge (z_{\alpha/2}\,\sigma/E)^2$. Ejemplo (ordinaria de 2024): $\sigma = 8$, $E = 1$, confianza del 90 %: $n > (1{,}645 \cdot 8)^2 = 173{,}19$, luego $n = 174$.

GLOSARIO

Población y muestra. La población es el conjunto completo que se estudia (todos los comercios de la ciudad). La muestra es la parte que se observa (los 50 comercios visitados).

Variable aleatoria (X). La magnitud que se mide en cada individuo: un precio, un peso, un tiempo. Hay que definirla con palabras y unidades.

Distribución normal, $N(\mu\,;\sigma)$. Modelo en forma de campana, simétrico respecto a la media μ y con dispersión σ.

Media poblacional (μ). Valor medio de X en toda la población. Es desconocida y es lo que se quiere estimar.

Desviación típica (σ). Dispersión de X en la población. En estos ejercicios es conocida y viene en el enunciado.

Media muestral ($\bar{x}$). Media de los datos de la muestra. Es la estimación de μ y el centro del intervalo.

Tamaño de la muestra (n). Número de individuos observados. Entra en las fórmulas con su raíz cuadrada.

Nivel de confianza ($1-\alpha$). Probabilidad con la que el método produce un intervalo que contiene a μ.

Nivel de significación (α). Lo que queda fuera del nivel de confianza. Se reparte en dos colas de área $\alpha/2$.

Valor crítico ($z_{\alpha/2}$). Valor de la normal estándar que deja a su izquierda un área $1 - \alpha/2$. Se lee en la tabla.

Normal estándar (Z, $N(0,1)$). Normal de media 0 y desviación típica 1. Su tabla da $P(Z \le z)$, el área acumulada hasta z.

Error típico. Desviación típica de la media muestral, $\sigma/\sqrt{n}$. Mide cuánto cambia $\bar{x}$ de una muestra a otra.

Margen de error o error máximo (E). Valor crítico por error típico. Es la mitad de la anchura del intervalo.

Intervalo de confianza. $(\bar{x} - E\;;\;\bar{x} + E)$. Rango de valores en el que se sitúa μ con el nivel de confianza fijado.

Proporción (p) y complementaria (q). Fracción de la población con una característica y fracción sin ella: $q = 1 - p$.

Caso más conservador. Si no se conoce p, se toma $p = q = 0{,}5$, que hace máximo el producto $p\,q = 0{,}25$ y da la muestra más grande.

Tamaño mínimo de la muestra. Menor n que garantiza el error pedido. Se despeja de la fórmula del error y se redondea hacia arriba.