PLANTILLA · DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA CON PARÁMETRO

Parámetro: _____ Incógnitas: $n =$ _____ Se pide discutir y resolver para: _____ y _____

Siete pasos, siempre en este orden. Los cuatro primeros son la discusión con el teorema de Rouché-Frobenius; los tres últimos, la resolución. A es la matriz de coeficientes y A' la ampliada con los términos independientes.

1 **Matrices.** Una fila por ecuación y una columna por incógnita. Si falta una incógnita, un 0.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} __ & __ & __ & __ \\ __ & __ & __ & __ \\ __ & __ & __ & __ \end{array}\right)$$

2 **Determinante y valores críticos.**

$|A| =$ _____

Factorizado: _____ $= 0$

Valores críticos: _____ y _____

Se saca factor común; no se divide entre el parámetro.

3 **Caso general.** Si el parámetro no es ningún valor crítico, $|A| \neq 0$ y $\text{rango}(A) = \text{rango}(A') = n$: compatible determinado.

4 **Cada valor crítico.** Se sustituye, se busca un menor de orden 2 no nulo y se orla con la columna de términos independientes.

Valor del parámetro	$\text{rango}(A)$	$\text{rango}(A')$	n	**Sistema**
distinto de ____ y ____	3	3	3	Compatible determinado
_____			3	
_____			3	

$\text{rango}(A) = \text{rango}(A') = n$: compatible determinado. $\text{rango}(A) = \text{rango}(A') < n$: compatible indeterminado. $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A')$: incompatible.

Menor orlado, primer valor: _____ $=$ _____ segundo valor: _____ $=$ _____

5 **Resolver si es compatible determinado.** Regla de Cramer (o Gauss), con $|A| =$ _____

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{_____}{_____} = _____ \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{_____}{_____} = _____ \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{_____}{_____} = _____$$

Comprobación en una ecuación: _____

6 **Resolver si es compatible indeterminado.** Se elimina una ecuación y una incógnita pasa a ser el parámetro λ.

Ecuaciones que quedan: _____ y _____

Solución: $(x, y, z) = (_____, _____, _____)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

7 **Solución particular.** Condición pedida: _____ $\Rightarrow$ $\lambda =$ _____ $\Rightarrow$ $(x, y, z) = (____, ____, ____)$

Antes de entregar. ¿Hay un 0 donde falta una incógnita? · ¿He factorizado sin dividir entre el parámetro? · ¿Cada caso lleva sus dos rangos, n y el nombre del sistema? · ¿La solución general lleva $\lambda \in \mathbb{R}$? · ¿He comprobado la solución?

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2022-23, EXTRAORDINARIA, B.1 (2,5 PUNTOS)

Dado el sistema $\{-2x+y+kz=1;\ \ kx-y-z=0;\ \ -y+(k-1)z=3\}$: a) (1,25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k. b) (0,5 puntos) Resolverlo para $k=3$. c) (0,75 puntos) Resolverlo para $k=3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x=2$.

1 **Matrices.**

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 3 \end{array}\right)$$

2 **Determinante.** $|A| = 3k - 2k^2 = k\,(3-2k)$

Valores críticos: $k=0$ y $k=\frac{3}{2}$

3 **Caso general.** Si $k\neq 0$ y $k\neq\frac{3}{2}$: $\text{rango}(A)=\text{rango}(A')=3$, compatible determinado.

4 **Valores críticos.**

Valor de k	$\text{rango}(A)$	$\text{rango}(A')$	n	Sistema	Menor orlado
$k\neq 0$ y $k\neq\frac{3}{2}$	3	3	3	Compatible determinado	$\lvert A\rvert \neq 0$
$k=0$	2	3	3	Incompatible	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6$
$k=\frac{3}{2}$	2	2	3	Compatible indeterminado	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

5 **Resolver con $k=3$ (compatible determinado).** $|A|=-9,\ |A_x|=3,\ |A_y|=15,\ |A_z|=-6$

$x=\dfrac{3}{-9}=-\dfrac{1}{3},\qquad y=\dfrac{15}{-9}=-\dfrac{5}{3},\qquad z=\dfrac{-6}{-9}=\dfrac{2}{3}.$ Comprobación: $-y+2z=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=3$.

6 **Resolver con $k=\frac{3}{2}$ (compatible indeterminado).** Con $x=\lambda$ y las ecuaciones segunda y tercera:

$\frac{3}{2}\lambda-y-z=0,\ \ -y+\frac{1}{2}z=3\ \Rightarrow\ z=\lambda+2,\ \ y=\frac{1}{2}\lambda-2.$ Solución: $\left(\lambda,\ \frac{1}{2}\lambda-2,\ \lambda+2\right),\ \lambda\in\mathbb{R}$

7 **Solución particular.** $x=2\ \Rightarrow\ \lambda=2\ \Rightarrow\ (x,y,z)=(2,-1,4)$

GLOSARIO

Matriz de coeficientes (A). Los coeficientes de las incógnitas, una fila por ecuación y una columna por incógnita.

Matriz ampliada (A'). La matriz A con una columna más, la de los términos independientes.

Parámetro. Letra que representa un número fijo y desconocido. Discutir es decir qué tipo de sistema resulta para cada valor suyo.

Valores críticos. Valores del parámetro que anulan $|A|$. Solo en ellos el sistema puede dejar de ser compatible determinado.

Rango. Orden del mayor menor no nulo de la matriz. Es el número de filas, o de ecuaciones, que son de verdad independientes.

Menor y menor orlado. Un menor es el determinante de una submatriz cuadrada. Orlarlo es añadirle una fila y una columna para estudiar si el rango sube.

Teorema de Rouché-Frobenius. Un sistema es compatible si y solo si $\text{rango}(A)=\text{rango}(A')$. Si además ese rango coincide con el número de incógnitas n, es determinado; si es menor, indeterminado.

Compatible determinado. Una única solución. $\text{rango}(A)=\text{rango}(A')=n$.

Compatible indeterminado. Infinitas soluciones, que dependen de $n-\text{rango}(A)$ parámetros.

Incompatible. Sin solución. $\text{rango}(A)\neq\text{rango}(A')$.

Regla de Cramer. Con $|A|\neq 0$, cada incógnita es $\frac{|A_x|}{|A|}$, donde A_x es A con la columna de esa incógnita cambiada por los términos independientes.

Solución general y particular. La general recoge todas las soluciones con un parámetro, $\lambda\in\mathbb{R}$. Una particular resulta de dar a λ un valor concreto.