PLANTILLA · PROYECCIÓN, SIMÉTRICO Y DISTANCIA A UN PLANO

Plano π: _____ Punto P (___, ___, ___) Recta r: _____

Siete pasos, siempre en este orden. Los cuatro primeros dan la proyección y el simétrico; los tres últimos, la distancia entre la recta y el plano. Cada apartado termina con una frase que responde a lo que pide el enunciado.

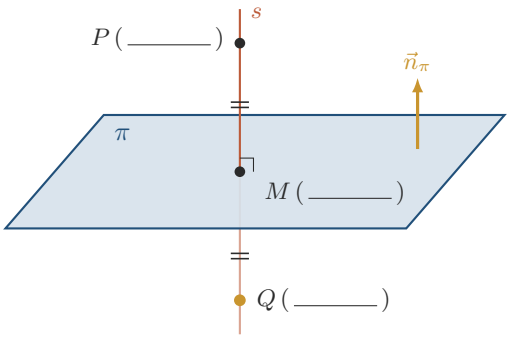
1 **Vector normal del plano.** Se lee en los coeficientes de $Ax + By + Cz = D$, con su signo.

$\vec{n}_\pi = (___, ___, ___)$

2 **Recta s perpendicular a π que pasa por P.** Su vector director es $\vec{n}_\pi$.

$s:\ (x, y, z) = (_____) + \lambda\,(_____),\quad \lambda \in \mathbb{R}$

Punto genérico: (_____, _____, _____)



3 **Punto de corte $M = s \cap \pi$ (proyección ortogonal de P).** Se sustituye el punto genérico en el plano y se despeja λ.

_____ = _____ $\Rightarrow$ $\lambda =$ _____ $\Rightarrow$ M (___, ___, ___)

Comprobación: M cumple la ecuación del plano _____

4 **Punto simétrico Q.** M es el punto medio del segmento PQ: $M = \dfrac{P+Q}{2} \Rightarrow Q = 2M - P$

$Q = 2\,(_____) - (_____) = (___, ___, ___)$ Comprobación: $\overrightarrow{PQ} =$ _____ $\parallel \vec{n}_\pi$

Frase: «*El punto simétrico de P respecto del plano π es Q* (_____)».

Si se pide la proyección: «*La proyección ortogonal de P sobre π es M* (_____)».

5 **Posición relativa de r y π: producto escalar.** El vector director $\vec{v}_r$ se lee en los denominadores de la recta.

$\vec{v}_r = (___, ___, ___)$ $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi =$ _____ = _____

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$	$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ **y un punto de r fuera de π**	$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ **y un punto de r dentro de π**
Se cortan en un punto. Distancia 0.	r es **paralela** a π. Se aplica el paso 7.	r está **contenida** en π. Distancia 0.

6 **Un punto de la recta decide.** Se sustituye un punto P_r de la recta en la ecuación del plano.

P_r (___, ___, ___) _____ = ____ frente a $D =$ ____ $\Rightarrow$ P_r ____ π $\Rightarrow$ r _____ π

7 **Distancia (solo si $r \parallel \pi$).** Con el plano escrito como $Ax + By + Cz - D = 0$ y $P_r\,(x_0, y_0, z_0)$:

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|\ _____\ |}{\sqrt{_____}} = \frac{____}{____} = ____$$

Frase: «*La recta r es* _____ *al plano π y la distancia entre ambos es de* _____ *unidades*».

Antes de entregar. $\lambda \in \mathbb{R}$ en la recta · flecha en los vectores · el signo de $-(-\lambda)$ · D pasado al primer miembro y valor absoluto · las dos comprobaciones del paralelismo · frase final con unidades.

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2025-26, ORDINARIA, PREGUNTA 3 (2 PUNTOS)

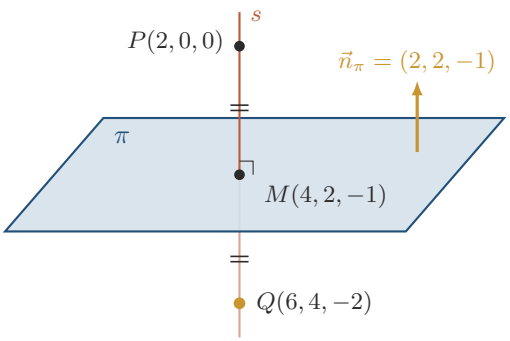
Dados el plano $\pi : 2x + 2y - z = 13$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{4}$. a) (1 punto) Halle el punto simétrico del punto $P(2,0,0)$ respecto al plano π. b1) (1 punto) Halle la distancia entre el plano π y la recta r.

1 **Vector normal.** $\vec{n}_\pi = (2,2,-1)$

2 **Recta perpendicular por P.**
$s:\ (x,y,z) = (2,0,0) + \lambda\,(2,2,-1),\quad \lambda \in \mathbb{R}$
Punto genérico: $(2+2\lambda,\ 2\lambda,\ -\lambda)$

3 **Corte $M = s \cap \pi$.**
$2(2+2\lambda) + 2(2\lambda) - (-\lambda) = 13 \ \Rightarrow\ 4 + 9\lambda = 13 \ \Rightarrow\ \lambda = 1$
$M = (2+2,\ 2,\ -1) = (4,2,-1)$. Comprobación: $8 + 4 + 1 = 13$.

4 **Simétrico.** $Q = 2M - P = (8,4,-2) - (2,0,0) = (6,4,-2)$
Comprobación: $\overrightarrow{PQ} = (4,4,-2) = 2\,\vec{n}_\pi$.



Frase: *«El punto simétrico de P respecto del plano π es $Q(6,4,-2)$»*.

5 **Producto escalar.** $\vec{v}_r = (1,1,4),\quad \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 4\cdot(-1) = 0 \ \Rightarrow\ \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$

6 **Un punto decide.** $P(2,0,0) \in r$ y $2\cdot 2 + 2\cdot 0 - 0 = 4 \neq 13 \ \Rightarrow\ P \notin \pi \ \Rightarrow\ r \parallel \pi$

7 **Distancia.** $d(r,\pi) = d(P,\pi) = \dfrac{|2\cdot 2 + 2\cdot 0 - 0 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|-9|}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3$

Frase: *«La recta r es paralela al plano π y la distancia entre ambos es de 3 unidades»*. Es la longitud del segmento PM del apartado a).

GLOSARIO

Vector normal del plano ($\vec{n}_\pi$). Vector perpendicular al plano. En $Ax + By + Cz = D$ es (A,B,C), con los signos de los coeficientes. Dirige cualquier recta perpendicular al plano.

Vector director de la recta ($\vec{v}_r$). Vector que marca la dirección de la recta. En la forma continua $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$ son los denominadores, y (x_0, y_0, z_0) es un punto de la recta.

Ecuación paramétrica y parámetro (λ). $(x,y,z) = P + \lambda\,\vec{v}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$: cada valor del parámetro λ da un punto de la recta.

Punto genérico. La recta escrita coordenada a coordenada en función de λ. Es lo que se sustituye en la ecuación del plano para hallar el corte.

Proyección ortogonal (M). Pie de la perpendicular trazada desde P al plano: $M = s \cap \pi$. Es el punto del plano más próximo a P.

Punto simétrico (Q). Punto situado al otro lado del plano, sobre la misma perpendicular y a la misma distancia que P. La proyección M es el punto medio de P y Q.

Punto medio. $M = \frac{P+Q}{2}$, coordenada a coordenada. Despejando, $Q = 2M - P$.

Producto escalar ($\vec{u}\cdot\vec{v}$). $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. Vale 0 exactamente cuando los dos vectores son perpendiculares.

Posición relativa de recta y plano. Se cortan en un punto si $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$. Si el producto es 0, la recta es paralela (un punto suyo no cumple la ecuación del plano) o está contenida (lo cumple).

Distancia de un punto a un plano. Se calcula con la fórmula $d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. El numerador es el valor absoluto de sustituir el punto en el plano; el denominador, el módulo de $\vec{n}_\pi$.

Distancia entre recta y plano, $d(r,\pi)$. Si son paralelos, la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Si se cortan o la recta está contenida, es 0.

Módulo ($|\vec{v}|$) y valor absoluto ($|a|$). El módulo es la longitud del vector, $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. El valor absoluto quita el signo a un número: $|-9| = 9$.

Símbolos. $\in$ pertenece; $\notin$ no pertenece; $\cap$ intersección; $\perp$ perpendicular; $\parallel$ paralelo; $\Rightarrow$ implica; $\equiv$ «tiene por ecuación»; $\mathbb{R}$ números reales; $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, vector de P a Q.