PLANTILLA · DOS RECTAS: POSICIÓN RELATIVA Y DISTANCIA

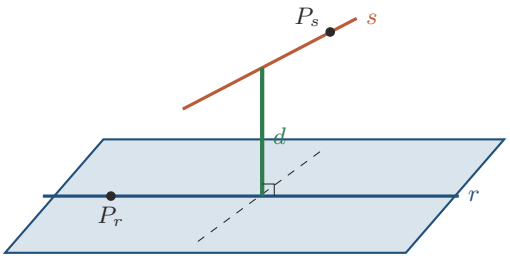
Recta r: _____ Recta s: _____ Punto P (_____)

Siete pasos, siempre en este orden. De cada recta hacen falta un punto y un vector director; con ellos se decide la posición con dos rangos y, si las rectas se cruzan, se calcula la distancia. El paso 6 es la perpendicular desde un punto a una recta.

1 **Un punto y un vector de cada recta.** En la forma continua, el vector está en los denominadores. Si la recta viene como dos planos, $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ y el punto sale dando un valor a una incógnita.

P_r (_____) $\quad \vec{v}_r = (_____)$

P_s (_____) $\quad \vec{v}_s = (_____)$



2 **¿Directores proporcionales?** _____

$\operatorname{rango}(\vec{v}_r, \vec{v}_s) =$ _____

3 **Vector que une los puntos y determinante.** $\overrightarrow{P_rP_s} = (_____)$

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}] = \begin{vmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{vmatrix} = _____ = ____ \qquad \operatorname{rango}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) = ____$$

4 **Posición relativa.**

Paralelas	Coincidentes	Se cortan	Se cruzan
Directores proporcionales y un punto de una fuera de la otra.	Directores proporcionales y un punto en común.	Directores no proporcionales y determinante $= 0$.	Directores no proporcionales y determinante $\neq 0$.

Las rectas r y s _____.

5 **Distancia (si se cruzan).** $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = (_____) \qquad |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{_____} = ____$

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|\ ____\ |}{____} = ____$$

Frase: «*Las rectas* _____ *y la distancia entre ellas es de* _____ *unidades*».

6 **Recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.**

Plano π por P con $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r$: _____ $= D$, $\quad D =$ _____

Corte $M = r \cap \pi$: punto genérico (_____); _____ $\Rightarrow \lambda =$ _____ $\Rightarrow M$ (_____)

$\overrightarrow{PM} = (_____)$ $\qquad$ Comprobación: $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{v}_r =$ _____

7 **Frase.** «*La recta pedida es* $(x, y, z) = (_____) + \alpha\,(_____)$, $\alpha \in \mathbb{R}$».

Antes de entregar. El signo del punto en la forma continua · la segunda componente del producto vectorial, con el signo cambiado · los dos rangos escritos · valor absoluto arriba y raíz abajo · frase final con unidades.

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2023-24, EXTRAORDINARIA, B.3 (2,5 PUNTOS)

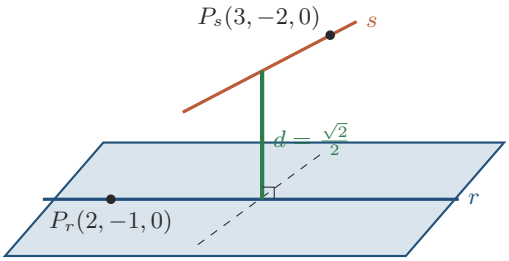
Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-0}{1}$ y $s \equiv \{x-y=5,\ x+z=3\}$: a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas. b) (1,5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

1 **Punto y vector.** $P_r(2,-1,0),\ \vec{v}_r = (3,-1,1)$
$(1,-1,0)\times(1,0,1) = (-1,-1,1) \Rightarrow \vec{v}_s = (1,1,-1)$
Con $x=3$: $z=0$, $y=-2 \Rightarrow P_s(3,-2,0)$

2 **Directores.** $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow \operatorname{rango}(\vec{v}_r,\vec{v}_s) = 2$

3 **Determinante.** $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,-1,0)$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3+1-2 = -4 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rango} = 3$$



4 **Posición.** Las rectas r y s se cruzan.

5 **Distancia.** $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = (0,4,4),\ |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2};\quad d(r,s) = \dfrac{|-4|}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$

Frase: *«Las rectas se cruzan y la distancia entre ellas es de $\sqrt{2}/2 \approx 0{,}707$ unidades»*.

6 **Perpendicular por P.** Plano: $3x-y+z=D;\ 15+1+2=D \Rightarrow \pi:\ 3x-y+z=18$
Corte: $(2+3\lambda,\ -1-\lambda,\ \lambda);\ 3(2+3\lambda)-(-1-\lambda)+\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow M(5,-2,1)$
$\overrightarrow{PM} = (0,-1,-1) \parallel (0,1,1)$. Comprobación: $(0,1,1)\cdot(3,-1,1) = 0$.

7 **Frase.** *«La recta pedida es $(x,y,z) = (5,-1,2) + \alpha\,(0,1,1),\ \alpha \in \mathbb{R}$»*.

GLOSARIO

Vector director ($\vec{v}_r$). Vector que marca la dirección de la recta. En la forma continua son los denominadores; cualquier múltiplo no nulo sirve igual.

Forma continua. $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$. El punto es (x_0,y_0,z_0): con $y+1$ en el numerador, $y_0 = -1$.

Forma implícita. La recta como corte de dos planos. Su director es el producto vectorial de los dos vectores normales, $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Producto vectorial ($\vec{u}\times\vec{v}$). Vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Se calcula con el determinante de filas $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$; la segunda componente lleva el signo cambiado. Su módulo es el área del paralelogramo que forman.

Producto mixto ($[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$). Determinante de los tres vectores. Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo que forman; vale 0 cuando los tres están en un mismo plano.

Rango. Número de vectores linealmente independientes. Dos vectores tienen rango 1 si son proporcionales y 2 si no; tres tienen rango 3 si su determinante es distinto de 0.

Rectas paralelas y coincidentes. Directores proporcionales. Coincidentes si además comparten un punto; paralelas si no.

Rectas que se cortan (secantes). Directores no proporcionales y un punto común. Están en un mismo plano: $[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{P_rP_s}] = 0$.

Rectas que se cruzan. Ni paralelas ni con puntos comunes. Ningún plano contiene a las dos: $[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{P_rP_s}] \neq 0$.

Distancia entre rectas que se cruzan. Se calcula con $d(r,s) = \frac{|[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}$: volumen del paralelepípedo entre el área de su base, es decir, su altura.

Plano perpendicular a una recta. Su vector normal es el director de la recta: $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r$. Contiene todas las rectas perpendiculares a r que pasan por un punto dado.

Símbolos. $\equiv$ «tiene por ecuación»; $\times$ producto vectorial; $\cdot$ producto escalar; $\parallel$ paralelo; $\perp$ perpendicular; $\cap$ intersección; $|\vec{v}|$ módulo; $\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r$.