PLANTILLA · RANGO CON PARÁMETRO, INVERSA Y ECUACIÓN MATRICIAL

Parámetro: _____ Valor para el que se resuelve la ecuación: _____ Ecuación: _____

Siete pasos, siempre en este orden. Los tres primeros discuten el rango; los cuatro últimos resuelven la ecuación matricial. Todo depende de una pregunta: ¿se anula el determinante? Si no se anula, el rango es máximo y existe la inversa.

1 **Determinante y raíces.** $|A| =$ _____ $|A| = 0 \Leftrightarrow$ _____ o _____

2 **Caso general.** Si el parámetro no es ninguna raíz, $|A| \neq 0$ y $\text{rango}(A) =$ _____.

3 **En cada raíz.** $|A| = 0$ y el rango baja. Se busca un menor de orden 2 distinto de cero.

Menor (filas ___ y ___, columnas ___ y ___): $\begin{vmatrix} ___ & ___ \\ ___ & ___ \end{vmatrix} =$ _____ $\Rightarrow$ $\text{rango}(A) =$ _____

Valor del parámetro	$\lvert A\rvert$	$\text{rango}(A)$
distinto de _____ y _____	$\neq 0$	
igual a _____ o _____	0	

4 **Despejar X con letras.** Las matrices no se dividen: se multiplica por la inversa, y por el mismo lado en los dos miembros.

$AX = B$	$XA = B$	$AX + X = B$
$X = A^{-1}B$	$X = BA^{-1}$	$(A+I)X = B \Rightarrow X = (A+I)^{-1}B$

En este ejercicio: _____ $\Rightarrow$ $X =$ _____

5 **¿Existe la inversa?** Determinante de la matriz que se invierte: _____ = _____ $\neq 0$

6 **Inversa.** $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t$. Adjunto: menor que queda al tachar fila y columna, con el signo del tablero.

Signos: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \dfrac{1}{___}\begin{pmatrix} ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \end{pmatrix}$

7 **Resultado y comprobación.** $X = \begin{pmatrix} ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \\ ___ & ___ & ___ \end{pmatrix}$ Comprobación: _____

Antes de entregar. ¿He enseñado el menor que justifica el rango 2? · ¿La inversa entra por el lado correcto? · ¿He puesto I y no un 1? · ¿Signos del tablero y adjunta traspuesta? · ¿He comprobado que la inversa existe?

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2025-26, ORDINARIA, PREGUNTA 1 (2 PUNTOS)

Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda-2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: a) (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ. b) (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

1. **Determinante.** $|A| = 1 + (\lambda-2)(\lambda-1) - \lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3)$; raíces $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$
2. **Caso general.** Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$: $|A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = 3$.
3. **Raíces.** Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 3$: $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ (filas 2 y 3, columnas 1 y 2), luego $\text{rango}(A) = 2$.
4. **Despejar.** $AX = A^2 - I \;\Rightarrow\; X = A^{-1}(A^2 - I) = A - A^{-1}$
5. **¿Existe la inversa?** Con $\lambda = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = 4 - 8 + 3 = -1 \neq 0$. Existe A^{-1}.
6. **Inversa.** $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
7. **Resultado.** $X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comprobación: $A^2 - AX = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I$.

GLOSARIO

Determinante ($|A|$). Número asociado a una matriz cuadrada. Si vale 0, la matriz no tiene inversa y sus filas no son independientes.

Menor. Determinante de la submatriz cuadrada que queda al elegir unas filas y unas columnas.

Rango. Orden del mayor menor distinto de cero. En una matriz 3×3 es 3 si $|A| \neq 0$.

Matriz identidad (I). Unos en la diagonal principal y ceros fuera. Es el «1» del producto: $AI = IA = A$.

Matriz inversa (A^{-1}). La que cumple $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$. Existe solo si $|A| \neq 0$.

Adjunto (A_{ij}). Menor que resulta de tachar la fila i y la columna j, con signo $+$ si $i + j$ es par y $-$ si es impar.

Matriz adjunta ($\text{Adj}(A)$). La matriz formada por todos los adjuntos, cada uno en su posición.

Traspuesta (A^t). La matriz que resulta de cambiar filas por columnas.

Fórmula de la inversa. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\big(\text{Adj}(A)\big)^t$. En orden 2, la inversa de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ es $\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$.

Ecuación matricial. Ecuación cuya incógnita X es una matriz. Se despeja con letras, multiplicando por inversas, antes de operar con números.

Producto no conmutativo. En general $AB \neq BA$. Por eso importa el lado por el que se multiplica: $AX = B$ da $X = A^{-1}B$.

Parámetro (λ). Letra que representa un número fijo y desconocido. Discutir el rango es decir cuánto vale para cada valor suyo.