PLANTILLA · LÍMITES CON L'HÔPITAL

Límite: $\lim_{x\to____}$ _____

Seis pasos. Todo depende de una pregunta: ¿qué sale al sustituir? El nombre de la indeterminación dice qué herramienta toca.

1 **Sustituir y nombrar.** Cada parte por separado. Si sale un número, ese es el límite.

Al sustituir sale	Herramienta
$\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$	Regla de L'Hôpital: se deriva el numerador y el denominador por separado.
$0\cdot\infty$ o $\infty-\infty$	Se transforma en un cociente (pasar un factor dividiendo, denominador común) y se vuelve a mirar.
1^∞, 0^0, ∞^0	Logaritmo: $L=e^\lambda$ con $\lambda=\lim g(x)\ln f(x)$. Solo para 1^∞ vale también $\lambda=\lim g(x)\big(f(x)-1\big)$.
$\frac{k}{0}$ con $k\neq 0$	No es indeterminación. El límite es infinito y se estudian los laterales.

Al sustituir: _____ → _____ _____ → _____ Indeterminación: [_____]

2 **Si es una potencia, tomar logaritmos.** El exponente baja multiplicando.

$L=e^\lambda$, con $\lambda=\lim_{x\to____}$ _____

3 **Volver a sustituir.** Tiene que quedar un cociente.

numerador → _____ denominador → _____ Indeterminación: [_____]

4 **Regla de L'Hôpital.** Se escribe el nombre de la regla. Cada derivada por su lado.

derivada del numerador: _____ derivada del denominador: _____

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$ $(\operatorname{tg} u)'=(1+\operatorname{tg}^2 u)\,u'$ $(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$ $(\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$ $(e^u)'=u'e^u$

5 **Sustituir en el cociente de derivadas.** Si vuelve a salir $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se repite el paso 4.

$\lambda=$ _____ / _____ = _____

6 **Deshacer el logaritmo y responder.** $L=e^{____}=$ _____ (si no hubo logaritmo, $L=\lambda$)

Cuando x tiende a infinito. En un cociente de polinomios del mismo grado, el límite es el cociente de los coeficientes principales. Si el grado del denominador es mayor, el límite es 0. Para 1^∞ con base racional suele ser más corto el atajo $\lambda=\lim g(x)\big(f(x)-1\big)$.

Antes de entregar. ¿He escrito el nombre de la indeterminación? · ¿He derivado arriba y abajo por separado, sin la regla del cociente? · ¿He nombrado la regla de L'Hôpital? · ¿He deshecho el logaritmo? · ¿Calculadora en radianes para comprobar con dos valores cercanos?

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2023-24, ORDINARIA, PREGUNTA B.2 b) (1,25 PUNTOS)

Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$.

1. **Sustituir.** Base: $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$. Exponente: $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, luego $\dfrac{1}{\cos x}\to\infty$. Indeterminación $[1^\infty]$.

2. **Logaritmo.** $L=e^{\lambda}$, con $\lambda=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\cos x}$

3. **Volver a sustituir.** Numerador: $\ln 1=0$. Denominador: $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$. Indeterminación $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

4. **L'Hôpital.** $\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}$; $\quad(\cos x)'=-\operatorname{sen}x$

5. **Sustituir.** $\lambda=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{-\operatorname{sen}x}=\dfrac{1\cdot2\cdot\frac{1}{2}}{-1}=-1$

6. **Resultado.** $\boldsymbol{L=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\approx0{,}368}$ Comprobación en radianes: $f(1{,}56)\approx0{,}36787$ y $\dfrac{1}{e}\approx0{,}36788$.

GLOSARIO

Límite. Valor al que se acercan las imágenes $f(x)$ cuando x se acerca a un punto. La función puede no estar definida en él.

Indeterminación. Resultado de sustituir que no decide el límite: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Regla de L'Hôpital. Si $\lim\frac{p(x)}{q(x)}$ da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y existe $\lim\frac{p'(x)}{q'(x)}$, los dos límites coinciden.

Número e. $e\approx2{,}718$. Es el límite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, el modelo de toda indeterminación 1^∞.

Logaritmo neperiano. $\ln a$ es el exponente al que hay que elevar e para obtener a. $\ln 1=0$ y $\ln e=1$.

Propiedad de la potencia. $\ln\left(a^b\right)=b\,\ln a$. Es la que baja el exponente.

Regla de la cadena. Derivada de una composición: $\big(f(u)\big)'=f'(u)\cdot u'$.

Límites laterales. Los que se calculan acercándose solo por la izquierda o solo por la derecha.

Radián. Unidad de ángulo del cálculo. $\frac{\pi}{2}$ radianes son $90°$: $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$.

Infinitésimo. Función que tiende a 0. En 1^∞, la diferencia $f(x)-1$ lo es.