PLANTILLA · INTEGRAL POR PARTES

Integral: $\int$ _____ dx $\qquad$ $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

Seis pasos. Todo depende de una pregunta: ¿qué factor se simplifica al derivarlo? Ese factor es u. El otro, con el dx, es dv.

1 **Elegir u y dv.** Se toma como u el factor que aparece antes en esta lista.

1.º Arcos	2.º Logaritmos	3.º Polinomios	4.º Exponenciales	5.º Senos y cosenos
$\operatorname{arctg} x$	$\ln x$	$x,\ x^2,\ x-a$	$e^x,\ e^{2x}$	$\operatorname{sen}(3x),\ \cos x$

$u =$ _____ (se deriva) $\qquad dv =$ _____ (se integra)

2 **Calcular du y v.** $du =$ _____ $\qquad v =$ _____ $\qquad$ ¿v' da dv? ☐

$\int \operatorname{sen}(kx)\,dx = -\dfrac{\cos(kx)}{k}$ $\qquad \int \cos(kx)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{k}$ $\qquad \int e^{kx}\,dx = \dfrac{e^{kx}}{k}$ $\qquad \int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

3 **Aplicar la fórmula.** Con v entre paréntesis si es negativa.

$\int$ _____ $=$ _____ $-\int$ _____ dx

4 **Primitiva completa.** $F(x) =$ _____

5 **Regla de Barrow.** Se calculan los dos valores. $F(0)$ no siempre es 0.

$F($ ____ $) =$ _____ $\qquad F($ ____ $) =$ _____ $\qquad$ Integral $=$ _____

6 **Si hay un parámetro.** Integral = dato: _____ $=$ _____ $\Rightarrow$ parámetro $=$ _____

Y si es un cociente de polinomios (integral racional). Si el numerador tiene grado igual o mayor que el denominador, primero se divide. Después: $\int \dfrac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C$ · $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$ · $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$.

Antes de entregar. ¿La integral que queda es más fácil que la primera? · ¿He puesto el $\frac{1}{k}$ al integrar $\operatorname{sen}(kx)$ o $\cos(kx)$? · ¿He vigilado el signo de $-\int v\,du$? · ¿He calculado los dos límites? · ¿Calculadora en radianes? · ¿He respondido a lo que se pregunta?

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2025-26, EXTRAORDINARIA, PREGUNTA 5.2 (2 PUNTOS)

Halle el valor real a tal que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a)\,\mathrm{sen}(3x)\,dx = \frac{2\pi}{9}$.

1 **Elección.** $u = x - a$ (polinomio, se deriva) y $dv = \mathrm{sen}(3x)\,dx$ (se integra).

2 ***du* y *v*.** $du = dx$; $\displaystyle v = \int \mathrm{sen}(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)$.

3 **Fórmula.** $\displaystyle\int (x-a)\,\mathrm{sen}(3x)\,dx = -\frac{(x-a)\cos(3x)}{3} - \int \left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)dx = -\frac{(x-a)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,dx$

4 **Primitiva.** $\displaystyle F(x) = -\frac{(x-a)\cos(3x)}{3} + \frac{\mathrm{sen}(3x)}{9}$

5 **Barrow.** En $x = \dfrac{\pi}{3}$: $\cos\pi = -1$, $\mathrm{sen}\,\pi = 0$. En $x = 0$: $\cos 0 = 1$, $\mathrm{sen}\,0 = 0$.

$\displaystyle F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\pi}{3} - a}{3} = \frac{\pi}{9} - \frac{a}{3}$; $\displaystyle F(0) = -\frac{(0-a)\cdot 1}{3} = \frac{a}{3}$; Integral $\displaystyle = \frac{\pi}{9} - \frac{a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{\pi}{9} - \frac{2a}{3}$

6 **Ecuación.** $\displaystyle\frac{\pi}{9} - \frac{2a}{3} = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow -\frac{2a}{3} = \frac{\pi}{9} \Rightarrow \boldsymbol{a = -\frac{\pi}{6}}$ Comprobación: $\displaystyle\frac{\pi}{9} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}$.

GLOSARIO

Integración por partes. Método para integrar un producto: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Cambia la integral por otra más fácil.

u y dv. Los dos papeles del producto: u se deriva y dv, que incluye el dx, se integra.

Primitiva. Función F cuya derivada es la función que se integra.

Integral definida. $\int_a^b f(x)\,dx$: un número. Se calcula con la regla de Barrow.

Regla de Barrow. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, con F una primitiva de f.

Constante de integración. La C que acompaña a toda primitiva. En una integral definida se cancela y no hace falta escribirla.

Parámetro. Letra que representa un número fijo y desconocido. Al integrar se trata como una constante.

Radián. Unidad de ángulo del cálculo: π radianes son media vuelta. $\cos\pi = -1$ y $\mathrm{sen}\,\pi = 0$.

Integral racional. La de un cociente de polinomios. Las más sencillas dan un logaritmo o un arco tangente.

Integral inmediata. La que sale directamente de la tabla de derivadas leída al revés.