PLANTILLA · DETERMINANTES POR PROPIEDADES

Todo depende de una pregunta: ¿qué propiedad convierte este determinante en otro que sé calcular? Primero se mira qué operación hay dentro. Después se aplica la propiedad, diciendo cuál es.

1 **Las propiedades.** A y B son matrices cuadradas de orden n, y k es un número.

Dentro hay...	Propiedad	Ojo
Un producto	$\det(AB) = \det A \cdot \det B$	Vale aunque $AB \neq BA$
Una potencia	$\det(A^m) = (\det A)^m$	Es el producto, repetido
Un número por la matriz	$\det(kA) = k^n \det A$	El número sale una vez por fila
La traspuesta	$\det(A^t) = \det A$	
La inversa	$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$	Existe solo si $\det A \neq 0$
Una suma	no hay propiedad	Se suman las matrices y se calcula

2 **Aplicar, paso a paso.** En cada igualdad, la propiedad usada.

$\det(_____) = _____$ (_____) $= _____$ (_____)

3 **Determinante de orden 3.** Sarrus: bajan sumando, suben restando. Con ceros, desarrollo por una fila.

$$\begin{vmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{vmatrix} = (___ + ___ + ___) - [___ + ___ + ___] = _____$$

4 **Imponer la condición del enunciado.** $_____ = _____ \Rightarrow$ parámetro $= ___$

5 **Sistema homogéneo** ($M\,X = 0$). Siempre tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.

$\det M \neq 0$	$\det M = 0$
Compatible determinado: solo la trivial	Compatible indeterminado: infinitas soluciones

$\det M = ____$ rango $M = ___$ número de parámetros $= 3 - ___ = ___$

6 **Resolver.** Conservo: $_____$ $(x, y, z) = (___, ___, ___)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Antes de entregar. ¿He dicho qué propiedad uso en cada paso? · ¿He elevado el número al orden de la matriz? · ¿He evitado repartir el determinante en una suma? · ¿He puesto el corchete en Sarrus? · ¿La solución del sistema lleva el parámetro y $\lambda \in \mathbb{R}$?

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2023-24, EXTRAORDINARIA, B.1 (2,5 PUNTOS)

Como es bien sabido, la igualdad $\det(A+B)=\det A+\det B$ no es cierta en general. a) (0,75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A+B)=\det A+\det B$, pruebe que entonces $\det\left((A+B)^2\right)=\det(A^2)+\det(B^2)+2\det(AB)$. b) (1 punto) Dadas $C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\ \alpha&1&0\\ 2&-1&\alpha\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}1&0&1\\ 2&1&2\\ -1&2&1\end{pmatrix}$, determine el único valor de α con el que sí se cumple $\det(C+D)=\det C+\det D$. c) (0,75 puntos) Para $\alpha=-1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

1 **a) Qué hay dentro.** Un cuadrado, que es un producto, y una suma, para la que se usa la hipótesis.

2 **a) Demostración.** $\det\left((A+B)^2\right)=\det\left((A+B)(A+B)\right)=\left(\det(A+B)\right)^2$ (det. de un producto)

$=(\det A+\det B)^2$ (hipótesis) $=(\det A)^2+(\det B)^2+2\det A\cdot\det B$

$=\det(A^2)+\det(B^2)+2\det(AB)$ (det. de un producto). Queda probada la igualdad.

3 **b) Determinantes.** $\det D=(1+0+4)-[-1+0+4]=2$; $\det C=(\alpha+0+\alpha)-[-2+0+0]=2\alpha+2$

$C+D=\begin{pmatrix}2&0&0\\ \alpha+2&2&2\\ 1&1&\alpha+1\end{pmatrix}$; por la primera fila, $\det(C+D)=2\left[2(\alpha+1)-2\right]=4\alpha$

4 **b) Condición.** $4\alpha=(2\alpha+2)+2\ \Rightarrow\ 2\alpha=4\ \Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha=2}$. Comprobación: $8=6+2$.

5 **c) Discusión.** Con $\alpha=-1$: $\det C=2\cdot(-1)+2=0$ y $\begin{vmatrix}1&0\\ -1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$, luego rango $C=2<3$.

Sistema compatible indeterminado, con $3-2=1$ parámetro.

6 **c) Resolución.** Con $x-z=0$, $-x+y=0$ y $x=\lambda$: $\boldsymbol{(x,y,z)=(\lambda,\lambda,\lambda)}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Comprobación en la tercera: $2\lambda-\lambda-\lambda=0$.

GLOSARIO

Determinante. Número asociado a una matriz cuadrada. Se escribe $\det A$ o $|A|$.

Orden. Número de filas (y de columnas) de una matriz cuadrada.

Regla de Sarrus. Cálculo del determinante de orden 3: tres productos que suman y tres que restan.

Desarrollo por una fila. Suma de cada elemento de la fila por su adjunto. Conviene con filas que tienen ceros.

Matriz triangular. La que tiene ceros a un lado de la diagonal. Su determinante es el producto de la diagonal.

Hipótesis. Lo que el enunciado da por cierto. En una demostración hay que usarla y decir dónde.

Sistema homogéneo. El que tiene todos los términos independientes iguales a 0.

Solución trivial. $x=y=z=0$. La tiene todo sistema homogéneo.

Rango. Orden del mayor menor distinto de 0. Indica cuántas ecuaciones son independientes.

Parámetro (λ). Letra que toma cualquier valor real y genera las infinitas soluciones.