PLANTILLA · CONTINUIDAD, DERIVABILIDAD Y RECTA TANGENTE

Función a trozos: $f(x) =$ _____ si $x < x_0$ y _____ si $x \geq x_0$, con $x_0 =$ _____

Seis pasos, siempre en este orden: primero la continuidad y después la derivabilidad. Todo depende de una pregunta: ¿encajan los dos trozos en altura y en pendiente?

1 **Continuidad en x_0.** Condición: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) =$ _____ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) =$ _____ $f(x_0) =$ _____

2 **Se igualan: primer parámetro.** _____ $=$ _____ $\Rightarrow$ _____

3 **Derivada de cada trozo**, en intervalos abiertos (sin el igual).

$f'(x) =$ _____ si $x < x_0$ $f'(x) =$ _____ si $x > x_0$

Potencia	Producto	Cociente	Cadena
$(x^n)' = n\,x^{n-1}$	$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\big(g(u)\big)' = g'(u) \cdot u'$
$(e^u)' = u'e^u$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$	$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

4 **Derivabilidad en x_0.** Condición: continua y $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$

$f'(x_0^-) =$ _____ $f'(x_0^+) =$ _____ se igualan $\Rightarrow$ segundo parámetro: _____

5 **Recta tangente en $x = a$.** ¿Qué trozo toca? _____

Punto: $f(a) =$ _____ Pendiente: $m = f'(a) =$ _____

6 **Ecuación.** $y - f(a) = f'(a)\,(x - a) \Rightarrow y -$ _____ $=$ _____ $\cdot (x -$ _____$)$

Antes de entregar. ¿He impuesto la continuidad antes que la derivabilidad? · ¿He escrito los dos límites laterales y $f(x_0)$? · ¿He aplicado la regla de la cadena? · ¿He usado el trozo correcto para la tangente? · ¿He dejado los valores exactos, sin redondear?

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2025-26, ORDINARIA, PREGUNTA 5.2 (2 PUNTOS)

Sea la función $f(x)=\begin{cases}3x^2-\operatorname{sen}(ax)+b & \text{si } x<0\\ \dfrac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x=0$. b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$.

1 **Continuidad en $x=0$.**

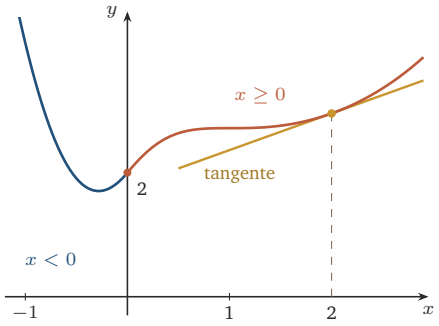
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=3\cdot 0-\operatorname{sen}0+b=b$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{2e^0}{1+0}=2=f(0)$

2 **Primer parámetro.** $b=2$

3 **Derivadas.** $f'(x)=6x-a\cos(ax)$ si $x<0$

$f'(x)=\dfrac{2e^x(1+x^2)-2e^x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}$ si $x>0$



4 **Derivabilidad en $x=0$.** $f'(0^-)=-a$; $f'(0^+)=\dfrac{2\cdot 1\cdot 1}{1}=2$; $-a=2\Rightarrow a=-2$.

La función es continua y derivable en $x=0$ para $a=-2$ y $b=2$.

5 **Tangente en $x=2$.** Como $2\geq 0$, se usa el segundo trozo.

Punto: $f(2)=\dfrac{2e^2}{5}$. Pendiente: $m=f'(2)=\dfrac{2e^2(4-4+1)}{(1+4)^2}=\dfrac{2e^2}{25}$.

6 **Ecuación.** $\boldsymbol{y-\dfrac{2e^2}{5}=\dfrac{2e^2}{25}(x-2)}$

En explícita: $y=\dfrac{2e^2}{25}x+\dfrac{6e^2}{25}$. Valores aproximados: $f(2)\approx 2{,}96$ y $m\approx 0{,}59$.

GLOSARIO

Función a trozos. La que usa fórmulas distintas en intervalos distintos. El punto donde cambia es el punto de unión.

Límites laterales. Valores a los que se acerca la función por la izquierda ($x\to x_0^-$) y por la derecha ($x\to x_0^+$).

Continua en x_0. Los dos límites laterales existen, coinciden y valen $f(x_0)$. La gráfica no tiene salto.

Derivadas laterales. Pendiente con la que la gráfica llega al punto por cada lado: $f'(x_0^-)$ y $f'(x_0^+)$.

Derivable en x_0. Continua y con las dos derivadas laterales iguales. La gráfica no tiene pico.

Regla de la cadena. Derivada de una función compuesta: la de fuera por la derivada de la de dentro.

Regla del cociente. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. El orden de la resta no se puede cambiar.

Recta tangente. Recta que toca a la gráfica en un punto y lleva su misma pendiente.

Punto de tangencia. El punto $(a,f(a))$ donde la recta toca a la gráfica.

Ecuación punto-pendiente. $y-y_0=m\,(x-x_0)$: recta que pasa por (x_0,y_0) con pendiente m.