PLANTILLA · RECTAS Y PLANOS QUE CUMPLEN CONDICIONES

Seis pasos. Los tres primeros valen para cualquier apartado; los tres últimos se usan según lo que se pida. Todo depende de una pregunta: ¿qué punto y qué vector me da cada condición del enunciado?

1 **Leer los datos.** Recta r: $P_r\,(__,__,__)$, $\vec{v}_r = (__,__,__)$ Plano π: $\vec{n}_\pi = (__,__,__)$

2 **Traducir cada condición** a un punto o a un vector.

El enunciado dice…	…y me da
El plano contiene a la recta r	Un punto del plano, P_r, y un director del plano, $\vec{v}_r$
El plano es perpendicular a π	Un director del plano: $\vec{n}_\pi$
El plano es paralelo a π	El mismo vector normal: $\vec{n}_\pi$
El plano es perpendicular a r	Su vector normal: $\vec{v}_r$
La recta está contenida en π	Director perpendicular a $\vec{n}_\pi$; sus puntos cumplen la ecuación de π
La recta corta perpendicularmente a r	Pasa por un punto de r; director perpendicular a $\vec{v}_r$
La recta es perpendicular a π	Su director: $\vec{n}_\pi$
Pasa por los puntos A y B	Un punto, A, y un director, $\overrightarrow{AB}$

Aquí: «_____» ⇒ _____ «_____» ⇒ _____

3 **Vector perpendicular a otros dos: producto vectorial.** La segunda componente cambia de signo.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{vmatrix} = (__,__,__)$$

Comprobación: producto escalar con cada uno $= 0$

4 **Plano** (normal y punto). $__x + __y + __z + D = 0$; sustituyo el punto: $D = ____$

5 **Recta** (punto y director). Si el punto es un corte de recta y plano, paramétricas dentro del plano.

$\lambda = ____ \Rightarrow$ punto $(__,__,__)$ Ecuación: $\dfrac{x-__}{__} = \dfrac{y-__}{__} = \dfrac{z-__}{__}$

6 **Puntos de una recta a distancia d de un plano.** Punto genérico en la fórmula, con el plano igualado a cero.

$$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = d \Rightarrow |_____| = ____ \Rightarrow \lambda = ____ \text{ y } \lambda = ____ \Rightarrow \text{dos puntos}$$

Antes de entregar. ¿He escrito cada condición con su implicación? · ¿He distinguido director de normal? · ¿He comprobado el producto vectorial con un producto escalar? · ¿El plano está igualado a cero en la fórmula de la distancia? · ¿He dado las dos soluciones del valor absoluto?

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2024-25, ORDINARIA, PREGUNTA 3.1 (2,5 PUNTOS)

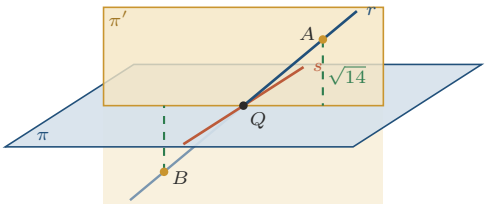
Dados la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x + 2y - 3z = 1$, se pide: a) (0,75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π. b) (0,75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r. c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

1 **Datos.** $P_r(1,0,2)$, $\vec{v}_r = (2,0,1)$, $\vec{n}_\pi = (1,2,-3)$.

2 **a) Traducir.** π' contiene a $r \Rightarrow$ pasa por P_r y $\vec{v}_r$ es director. $\pi' \perp \pi \Rightarrow \vec{n}_\pi$ es director de π'.

3 **Producto vectorial.**

$$\vec{n}_{\pi'} = \vec{v}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-2,7,4)$$



4 **a) Plano.** $-2(x-1)+7(y-0)+4(z-2)=0 \Rightarrow \boldsymbol{\pi' : 2x - 7y - 4z + 6 = 0}$. Con $(3,0,3) \in r$: $6-12+6=0$.

5 **b) Recta.** $s \subset \pi$ y corta a $r \Rightarrow$ pasa por $Q = r \cap \pi$: $(1+2\lambda) + 2\cdot 0 - 3(2+\lambda) = 1 \Rightarrow \lambda = -6 \Rightarrow Q(-11,0,-4)$.

$s \subset \pi \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi$; $s \perp r \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{v}_r$; $\vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{n}_\pi = (-2,7,4)$. $\boldsymbol{s \equiv \dfrac{x+11}{-2} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z+4}{4}}$

6 **c) Distancia.** Punto genérico $P(1+2\lambda, 0, 2+\lambda)$ y $\pi : x + 2y - 3z - 1 = 0$:

$$d(P,\pi) = \frac{|(1+2\lambda) - 3(2+\lambda) - 1|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|-\lambda - 6|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Rightarrow |\lambda + 6| = 14 \Rightarrow \lambda = 8 \text{ o } \lambda = -20$$

Los puntos son $\boldsymbol{A(17,0,10)}$ y $\boldsymbol{B(-39,0,-18)}$.

GLOSARIO

Vector director ($\vec{v}_r$). Marca la dirección de una recta. En la ecuación continua, los denominadores.

Vector normal ($\vec{n}_\pi$). Perpendicular al plano. En $Ax + By + Cz + D = 0$ es (A, B, C).

Vectores directores de un plano. Dos vectores no paralelos contenidos en el plano. Su producto vectorial es un vector normal.

Producto escalar. $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. Vale 0 cuando los vectores son perpendiculares.

Producto vectorial. $\vec{u} \times \vec{v}$: vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Se calcula con un determinante.

Ecuación continua. $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$. Un 0 abajo indica que esa coordenada es constante.

Ecuaciones paramétricas. $(x, y, z) = (x_0+v_1\lambda,\ y_0+v_2\lambda,\ z_0+v_3\lambda)$. Cada valor de λ da un punto.

Punto genérico. El punto de la recta escrito con el parámetro λ. Representa a todos a la vez.

Planos perpendiculares. Sus vectores normales son perpendiculares. El normal de uno es director del otro.

Distancia punto-plano. $d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, con el plano igualado a cero.