PLANTILLA · PROBABILIDAD TOTAL Y BAYES

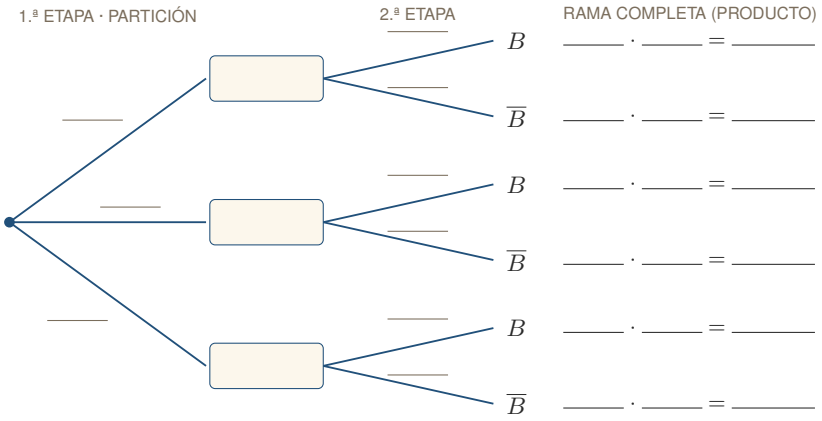
Seis pasos, siempre en este orden. Los cuatro primeros construyen el árbol y suman ramas; los dos últimos dan la vuelta a la condición. Todo depende de una pregunta: ¿qué se decide primero y qué viene después?

1 **Nombrar los sucesos.** Primera etapa, los grupos que reparten a toda la población. Segunda etapa, la característica.

$A_1 =$ «_____» $A_2 =$ «_____»

$A_3 =$ «_____» $B =$ «_____»

2 **Árbol completo.** Las ramas que salen de un mismo nudo suman 1. Sobre cada rama, su probabilidad; en la casilla, la letra del grupo.



3 **A lo largo de un camino se multiplica.** $P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$ (columna derecha del árbol)

4 **Teorema de la probabilidad total: se suman los caminos que acaban en B.**

$P(B) = P(A_1)\,P(B \mid A_1) + P(A_2)\,P(B \mid A_2) + P(A_3)\,P(B \mid A_3)$

$P(B) =$ _____ $+$ _____ $+$ _____ $=$ _____ Contrario: $P(\overline{B}) = 1 - P(B) =$ _____

5 **Fórmula de Bayes: un camino entre todos los que llegan al mismo final.** La condición va detrás de la barra y abajo.

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)}$$ En este ejercicio: $P($____ $\mid$ ____ $) = \dfrac{\text{____} \cdot \text{____}}{\text{____}} =$ _____

6 **Respuesta y comprobación.** Una frase por apartado, con la probabilidad entre 0 y 1.

a) _____

b) _____

Comprobación: las seis ramas completas suman _____ · numerador menor que denominador.

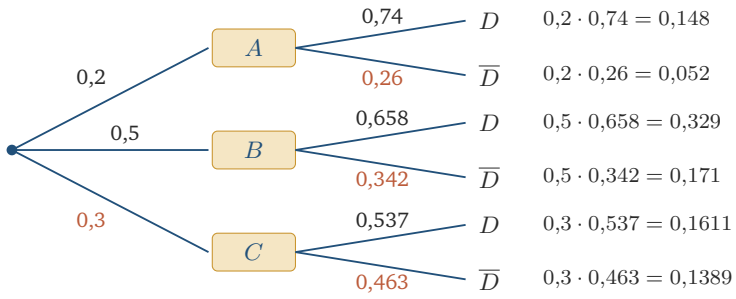
Antes de entregar. ¿He definido los sucesos con letras? · ¿Está el árbol con todas las ramas? · ¿He citado el teorema y escrito la fórmula con letras antes de sustituir? · ¿He distinguido $P(B \mid A)$ de $P(A \mid B)$? · ¿El denominador de Bayes es la probabilidad de la condición?

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2024-25, ORDINARIA, PREGUNTA 4.2 (2,5 PUNTOS)

Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20 % de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50 % entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74 % de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65,8 % entre los de 25 a 64 y al 53,7 % entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide: a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual. b) (1,25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

1 **Sucesos.** $A =$ «tener entre 14 y 24 años», $B =$ «tener entre 25 y 64 años», $C =$ «tener más de 64 años», $D =$ «ser lector habitual».

2 **Árbol.** $P(C) = 1 - 0{,}2 - 0{,}5 = 0{,}3$. En cada grupo, $P(\overline{D} \mid \cdot) = 1 - P(D \mid \cdot)$.



3 **Caminos.** Los que acaban en D: $0{,}148$, $0{,}329$ y $0{,}1611$.

4 **Probabilidad total.** $P(D) = P(A)P(D \mid A) + P(B)P(D \mid B) + P(C)P(D \mid C) = 0{,}148 + 0{,}329 + 0{,}1611 = 0{,}6381$; $P(\overline{D}) = 1 - 0{,}6381 = 0{,}3619$

5 **Bayes.** $P(B \mid \overline{D}) = \dfrac{P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}342}{0{,}3619} = \dfrac{0{,}171}{0{,}3619} \approx 0{,}4725$

6 **Respuesta.** a) La probabilidad de que sea lector habitual es $0{,}6381$. b) Si no es lector habitual, la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años es aproximadamente $0{,}4725$. Comprobación: $0{,}6381 + 0{,}3619 = 1$ y $0{,}171 < 0{,}3619$.

GLOSARIO

Suceso. Cada resultado posible que interesa del experimento. Se nombra con una letra mayúscula y se define con palabras.

Suceso contrario ($\overline{B}$). El que ocurre cuando no ocurre B. Se cumple $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$.

Sistema completo de sucesos. Grupos que no se solapan y que entre todos cubren la población. Sus probabilidades suman 1. También se llama partición.

Probabilidad condicionada ($P(B \mid A)$). Probabilidad de B sabiendo que ha ocurrido A. La condición se escribe detrás de la barra.

Intersección ($A \cap B$). Ocurren A y B a la vez. En el árbol es un camino completo: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$.

Diagrama de árbol. Esquema por etapas. En cada rama va la probabilidad de ese paso, condicionada a lo anterior.

Teorema de la probabilidad total. La probabilidad de B es la suma de todos los caminos que acaban en B.

Teorema de Bayes. Da la probabilidad de la causa conocido el efecto: el camino que interesa dividido entre la probabilidad de la condición.

Probabilidad a priori. La del grupo antes de saber nada más: $P(B) = 0{,}5$.

Probabilidad a posteriori. La del grupo una vez conocida la información: $P(B \mid \overline{D}) \approx 0{,}4725$.