PLANTILLA · ÁREAS Y VOLÚMENES CON VECTORES

Seis pasos. Todo depende de una pregunta: ¿cuántos vectores necesito y desde qué vértice? Dos vectores y el producto vectorial dan un área. Tres vectores y el producto mixto dan un volumen.

Paralelogramo	Triángulo	Paralelepípedo	Tetraedro
$\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert$	$\frac{1}{2}\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert$	$\lvert[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\rvert$	$\frac{1}{6}\lvert[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\rvert$

1 **Vectores desde un mismo vértice** (extremo menos origen).

$\overrightarrow{AB} = (__,__,__)$ $\overrightarrow{AC} = (__,__,__)$ $\overrightarrow{AD} = (__,__,__)$

2 **Producto mixto:** determinante con los tres vectores por filas.

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{vmatrix} = (__+__+__) - [__+__+__] = ____$$

3 **Coplanarios y volumen.** Si vale 0, coplanarios. Si no, _____. $V = \frac{1}{6}\lvert____\rvert = ____$ u^3

4 **Producto vectorial** de dos lados de la cara. La segunda componente cambia de signo.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ __ & __ & __ \\ __ & __ & __ \end{vmatrix} = (__,__,__)$$ Módulo: $\sqrt{__+__+__} = ____$

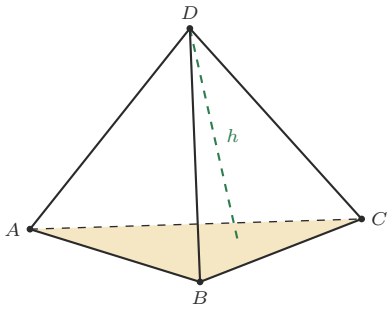
5 **Área de la cara.** Área $= \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\rvert = _____$ u^2

6 **Altura.** $V = \frac{1}{3}\cdot$ Área de la base $\cdot\, h \;\Rightarrow\; h = \frac{3V}{\text{Área}} = _____ = _____$ u

Antes de entregar. ¿He usado vectores y no puntos? · ¿Salen todos del mismo vértice? · ¿He puesto el valor absoluto? · ¿He dividido entre 6 (tetraedro) o entre 2 (triángulo)? · ¿He escrito la conclusión sobre los puntos coplanarios? · ¿Llevan unidades el área y el volumen?

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2024-25, EXTRAORDINARIA, 3.1 a) Y b) (1,5 PUNTOS)

Sean los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$. a) (0,5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos. b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro $ABCD$ determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.



1 **Vectores.** $\overrightarrow{AB} = (1,-2,-2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3,-1,1)$, $\overrightarrow{AD} = (1,-4,-3)$

2 **Producto mixto.**

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (3-2-24)-[2-18-4] = -3$$

3 **a) Conclusión y volumen.** Como $-3 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes y **los puntos no son coplanarios**.

$$V = \frac{1}{6}|-3| = \mathbf{\frac{1}{2}\ u^3}$$

4 **Producto vectorial.** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2-2,\ -(1-6),\ -1-6) = (-4,5,-7)$

5 **b) Área.** $\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{16+25+49} = \frac{\sqrt{90}}{2} = \mathbf{\frac{3\sqrt{10}}{2}\ u^2} \approx 4{,}74$

6 **b) Altura.** $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{2}\cdot h \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{10}} = \mathbf{\frac{\sqrt{10}}{10}\ u} \approx 0{,}32$

Comprobación: plano ABC: $-4x+5y-7z+13=0$, y $d(D,\pi) = \frac{|-8-15+7+13|}{\sqrt{90}} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

GLOSARIO

Vector entre dos puntos. $\overrightarrow{AB} = B - A$: coordenadas del extremo menos las del origen.

Puntos coplanarios. Los que están en un mismo plano. Cuatro puntos lo son si el producto mixto de los tres vectores vale 0.

Producto vectorial. $\vec{u}\times\vec{v}$: vector perpendicular a los dos. Su módulo es el área del paralelogramo que forman.

Producto mixto. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$: el determinante con los tres vectores por filas.

Módulo. Longitud de un vector: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$.

Paralelepípedo. Cuerpo de seis caras que son paralelogramos. Lo generan tres vectores con origen común.

Tetraedro. Pirámide de base triangular: cuatro vértices y cuatro caras. Ocupa la sexta parte del paralelepípedo.

Altura. Distancia de un vértice al plano de la cara opuesta.

Linealmente independientes. Tres vectores que no caben en un mismo plano. Su determinante es distinto de 0.

Racionalizar. Quitar la raíz del denominador: $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.