PLANTILLA · ÁREA ENTRE DOS CURVAS

Curvas: $f(x) =$ _____ $g(x) =$ _____ Intervalo: [_____, _____]

Seis pasos, siempre en este orden. Los cuatro primeros son el planteamiento, que es lo que más puntúa; los dos últimos, las cuentas. Todo depende de una pregunta: ¿qué curva va por encima en cada tramo?

1 Función diferencia. $f(x) - g(x) = (\ _____\ ) - (\ _____\ ) = _____$

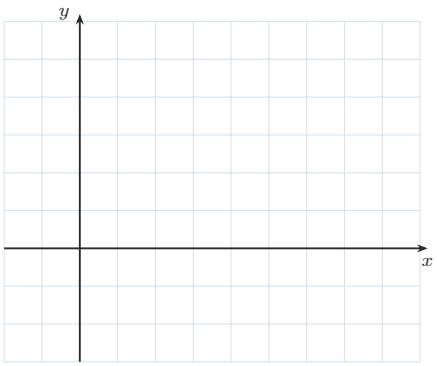
2 Cortes entre las curvas. $f(x) - g(x) = 0 \ \Rightarrow$ factorizo: _____ $= 0$

Soluciones: $x =$ _____, $x =$ _____, $x =$ _____ Dentro del intervalo quedan: _____

Si el enunciado no da rectas verticales, los límites de integración son los propios cortes.

3 Signo en cada tramo y croquis. Valor de prueba en $f - g$: positivo, f por encima; negativo, g.

Tramo	Valor de prueba	$f - g$ en ese valor	Por encima
(____, ____)			
(____, ____)			
(____, ____)			



CROQUIS: CURVAS, CORTES Y REGIÓN RAYADA

4 Planteamiento. En cada tramo, la de arriba menos la de abajo. Se suman los tramos.

$$A = \int_{__}^{__} (\ _____\ )\,dx + \int_{__}^{__} (\ _____\ )\,dx$$

5 Primitiva. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $F(x) =$ _____ Comprobación: $F' = f - g$

6 Regla de Barrow en cada tramo y suma. $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Tramo 1: _____ $=$ _____ Tramo 2: _____ $=$ _____

$A =$ _____ $+$ _____ $=$ _____ u^2 Frase final: _____

Antes de entregar. ¿He buscado los cortes entre las dos curvas y no con el eje X? · ¿He partido la integral en cada corte interior? · ¿He justificado el signo con un valor de prueba? · ¿El valor del límite inferior va entre paréntesis? · ¿Todos los tramos salen positivos? · ¿He puesto las unidades?

EJEMPLO RESUELTO · PAU MADRID 2022-23, EXTRAORDINARIA, B.2 b) (1,5 PUNTOS)

Dadas las funciones $f(x) = 2 + 2x - 2x^2$ y $g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3$, se pide: b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

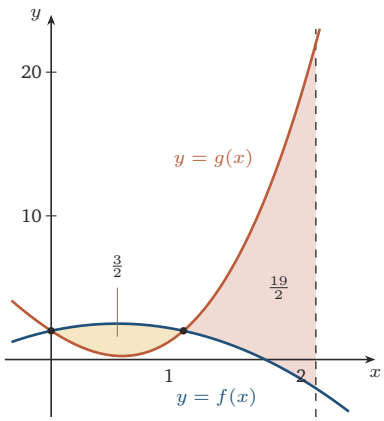
1 **Diferencia.** $f(x) - g(x) = 8x - 6x^2 - 2x^3$

2 **Cortes.** $-2x\,(x^2 + 3x - 4) = 0 \;\Rightarrow\; x = -4,\; x = 0,\; x = 1.$
En $[0, 2]$ solo $x = 1$ es interior: dos tramos.

3 **Signo.** $f(0{,}5) - g(0{,}5) = 4 - 1{,}5 - 0{,}25 = 2{,}25 > 0$:
f por encima en $(0, 1)$.
$f(1{,}5) - g(1{,}5) = 12 - 13{,}5 - 6{,}75 = -8{,}25 < 0$:
g por encima en $(1, 2)$.

4 **Planteamiento.**

$$A = \int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx + \int_1^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$



5 **Primitiva.** $F(x) = 4x^2 - 2x^3 - \dfrac{x^4}{2}$ (de $f - g$; la de $g - f$ es $-F$). Comprobación: $F'(x) = 8x - 6x^2 - 2x^3$.

6 **Barrow.** $\left[4x^2 - 2x^3 - \dfrac{x^4}{2}\right]_0^1 = \left(4 - 2 - \dfrac{1}{2}\right) - 0 = \dfrac{3}{2}$; $\quad \left[\dfrac{x^4}{2} + 2x^3 - 4x^2\right]_1^2 = 8 - \left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{19}{2}$

$A = \dfrac{3}{2} + \dfrac{19}{2} = 11.$ **El área de la región es de 11 u^2.** Sin partir: $F(2) - F(0) = -8$, que no mide la región.

GLOSARIO

Primitiva. Función F cuya derivada es la función dada: $F'(x) = h(x)$. Se comprueba derivando.

Integral definida. $\int_a^b h(x)\,dx$. Suma con signo de las franjas entre la gráfica y el eje X, de $x = a$ a $x = b$.

Límites de integración. Los números a y b. Marcan dónde empieza y dónde acaba la región.

Regla de Barrow. $\int_a^b h(x)\,dx = F(b) - F(a)$, con F una primitiva de h y h continua en $[a, b]$.

Función diferencia. $f(x) - g(x)$. Sus ceros son los cortes entre las curvas y su signo dice cuál va por encima.

Puntos de corte. Valores de x donde $f(x) = g(x)$. Los interiores al intervalo obligan a partir la integral.

Valor de prueba. Un número cualquiera del interior de un tramo. Sirve para conocer el signo de $f - g$ en todo el tramo.

Área entre dos curvas. $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$. En la práctica, arriba menos abajo en cada tramo.

Integral de una potencia. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, para $n \neq -1$.

Unidades cuadradas (u^2). Unidad del área cuando los ejes no llevan unidades de medida.