PLANTILLA DE MÉTODO · ECUACIÓN EXPONENCIAL CON CAMBIO DE VARIABLE

Nombre: _____ Ejercicio: _____ Fecha: _____

Pregunta que ordena el método: **¿hay una potencia que sea el cuadrado de la otra?** Si aparecen a^{2x} y a^x (o 4^x y 2^x, 9^x y $3^x \ldots$), la ecuación esconde una de segundo grado.

A · PREPARAR LA ECUACIÓN

1. **Ecuación igualada a cero:** _____ $= 0$

2. **El cuadrado escondido.** Potencia grande: _____ Potencia pequeña: _____ Relación: _____ $=$ (_____)^2

B · CAMBIO DE VARIABLE

3. **Cambio:** $z =$ _____ **Ecuación en** z**:** _____ $z^2 +$ _____ $z +$ _____ $= 0$

4. $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{____ \pm \sqrt{_____}}{____} = \dfrac{____ \pm ____}{____} \Rightarrow z_1 =$ _____, $z_2 =$ _____

C · DESHACER EL CAMBIO

5. **Un camino por cada valor de** z**.** Una potencia de base positiva es siempre positiva.

Valor de z	¿Es positivo?	Ecuación que queda	Solución
$z =$ _____	☐ sí ☐ no, se descarta	_____ $=$ _____ $=$ _____ ——	$x =$ _____
$z =$ _____	☐ sí ☐ no, se descarta	_____ $=$ _____ $=$ _____ ——	$x =$ _____

Si el valor de z no es una potencia exacta de la base, se despeja con logaritmos: $a^x = z \Rightarrow x = \dfrac{\log z}{\log a}$.

D · COMPROBAR Y RESPONDER

6. **Comprobación.** Sustituye en la ecuación inicial: _____ $=$ _____ ¿cumple? ☐

7. **Frase.** «_____».

Repasa antes de entregar: ☐ 4^x es $(2^x)^2$, no $2 \cdot 2^x$ ☐ el número que multiplica a la potencia se queda fuera ☐ signo de $-4ac$ ☐ valor negativo de z descartado con su razón ☐ respuesta en la incógnita original, no en z.

Las otras dos exponenciales. Si se pueden igualar las bases: $a^p = a^q \Rightarrow p = q$. Si no: $a^x = b \Rightarrow x = \dfrac{\log b}{\log a}$.

LA PLANTILLA RELLENA · LOS PRIMEROS AÑOS DE NUVIA (LECCIÓN 5)

Los ingresos de Nuvia, en miles de euros, son $I(t) = 4^t$ y sus costes, $C(t) = 6 \cdot 2^t + 16$, con t en años. a) Ingresos y costes a los 2 años (0,5). b) Momento en que se igualan (1,5). c) Interpretación y beneficio a los 4 años (0,5).

A · PREPARAR LA ECUACIÓN

1. $I(t) = C(t) \Rightarrow 4^t = 6 \cdot 2^t + 16 \Rightarrow 4^t - 6 \cdot 2^t - 16 = 0$
2. Potencia grande: 4^t. Potencia pequeña: 2^t. Relación: $4^t = (2^t)^2$.

B · CAMBIO DE VARIABLE

3. $z = 2^t \qquad z^2 - 6z - 16 = 0 \qquad a = 1,\ b = -6,\ c = -16$
4. $z = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \dfrac{6 \pm 10}{2} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 8,\ z_2 = -2$

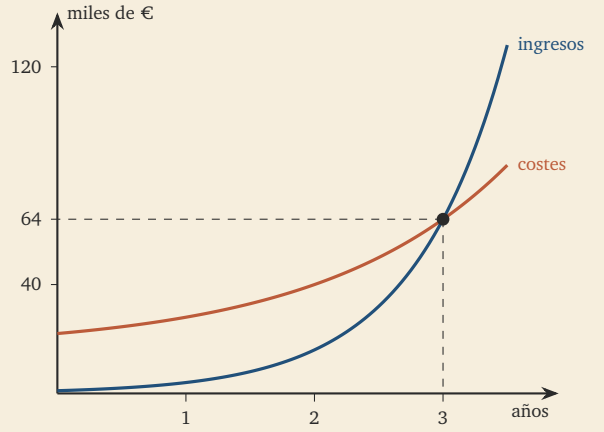
C · DESHACER EL CAMBIO

5. $z = -2$: $2^t = -2$ no tiene solución, porque $2^t > 0$. Se descarta.
   $z = 8$: $2^t = 8 = 2^3 \Rightarrow \mathbf{t = 3}$.

D · COMPROBAR Y RESPONDER

6. $I(3) = 4^3 = 64;\ C(3) = 6 \cdot 8 + 16 = 64$. Coinciden.
7. «Los ingresos igualan a los costes a los 3 años. Antes hay pérdidas (a los 2 años, 16 frente a 40) y después beneficios: a los 4 años, $256 - 112 = 144$ mil euros».

LA GRÁFICA



GLOSARIO

Ecuación exponencial. La que tiene la incógnita en un exponente.

Base y exponente. En 2^t, la base es 2 y el exponente, t.

Potencia de una potencia. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Por eso $4^t = (2^2)^t = (2^t)^2$.

Cambio de variable. Dar un nombre nuevo, z, a una expresión que se repite, para que la ecuación sea más sencilla.

Variable auxiliar (z). La letra del cambio. No es la respuesta: hay que volver a la incógnita original.

Deshacer el cambio. Sustituir z por lo que representa y despejar la incógnita.

Discriminante. El número $b^2 - 4ac$ de la fórmula de segundo grado.

Igualar bases. Si $a^p = a^q$, entonces $p = q$.

Ingresos (I). Dinero que entra en la empresa por sus ventas.

Costes (C). Dinero que la empresa gasta para producir y vender.

Beneficio (B). Ingresos menos costes. Si es negativo, hay pérdidas.

Umbral de rentabilidad. Momento o cantidad en que los ingresos igualan a los costes y el beneficio es cero.