PLANTILLA DE MÉTODO · DESPEJAR EL EXPONENTE CON LOGARITMOS

Nombre: _____ Ejercicio: _____ Fecha: _____

Lo que crece (o disminuye) un porcentaje fijo cada año se multiplica cada año por el mismo número, y el tiempo queda en el exponente. Para despejarlo: **aislar la potencia, tomar logaritmos, bajar el exponente y dividir**.

A · EL MODELO

1. **Datos.** Cantidad inicial $N_0 =$ _____ Variación anual: ☐ crece ☐ disminuye un _____ %

   Factor anual: $1 \pm \frac{p}{100} =$ _____ **Expresión:** $N(t) =$ _____ $\cdot$ (_____)^t

2. **Cantidad en un año concreto.** $N($____$) =$ _____ $\cdot$ (_____)$^{\text{____}} =$ _____

B · DESPEJAR EL TIEMPO

3. **Plantea la ecuación** igualando la expresión a la cifra que se quiere alcanzar:

   _____ $\cdot$ (_____)$^t =$ _____

4. **Aísla la potencia**: el número que la multiplica pasa dividiendo.

   (_____)$^t = \frac{\text{_____}}{\text{_____}} =$ _____

5. **Toma logaritmos en los dos miembros y baja el exponente**: $\log a^t = t \cdot \log a$.

   $t \cdot \log$ _____ $=$ log _____

6. **Divide los dos logaritmos** con la calculadora, sin redondearlos antes.

   $t = \frac{\log \text{_____}}{\log \text{_____}} = \frac{\text{_____}}{\text{_____}} =$ _____ años

C · COMPROBAR Y RESPONDER

7. **Comprobación.** Sustituye el resultado: _____ $\cdot$ (_____)$^{\text{____}} =$ _____ ¿coincide? ☐

8. **Si piden años completos**, calcula el año anterior y el siguiente:

Año	Cantidad	¿Se ha alcanzado?

   Respuesta: _____ años completos.

9. **Frase.** «_____ alcanzará _____ al cabo de _____ años, es decir, durante el año _____».

Lo que hace falta saber de logaritmos. $\log_a b = c \iff a^c = b$ · $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$ · $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$ · $\log x^n = n \cdot \log x$

Repasa antes de entregar: ☐ crecimiento porcentual: se multiplica ☐ potencia aislada antes de los logaritmos ☐ se dividen los logaritmos ☐ arriba, el logaritmo del número mayor ☐ años completos hacia arriba.

LA PLANTILLA RELLENA · LOS CLIENTES DE VELOZ (LECCIÓN 2)

La empresa de reparto Veloz tiene hoy 6.000 clientes y su cartera crece un 5 % cada año. a) Expresión y clientes dentro de 10 años (0,75). b) Tiempo que tarda en duplicarse (1,25). c) Años completos para superar los 15.000 clientes (0,5).

A · EL MODELO

1. **Datos.** $N_0 = 6.000$ clientes; crece un 5 %. **Factor anual:** $1 + 0{,}05 = 1{,}05$. **Expresión:** $N(t) = 6.000 \cdot 1{,}05^{\,t}$
2. **Apartado a).** $N(10) = 6.000 \cdot 1{,}05^{\,10} = 6.000 \times 1{,}628895 = 9.773{,}37$, unos **9.773 clientes**.

B · DESPEJAR EL TIEMPO (apartado b)

3. **Ecuación.** El doble de 6.000 es 12.000: $6.000 \cdot 1{,}05^{\,t} = 12.000$
4. **Potencia aislada.** $1{,}05^{\,t} = \dfrac{12.000}{6.000} = 2$
5. **Logaritmos.** $\log 1{,}05^{\,t} = \log 2 \;\Rightarrow\; t \cdot \log 1{,}05 = \log 2$
6. **División.** $t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}05} = \dfrac{0{,}30103}{0{,}021189} =$ **14,21 años**

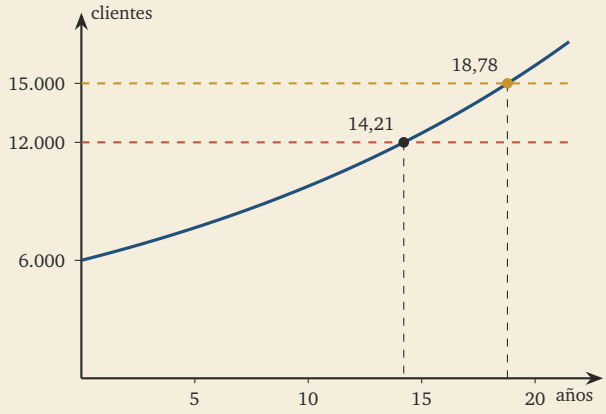
C · COMPROBAR Y RESPONDER

7. $6.000 \cdot 1{,}05^{\,14{,}2067} = 12.000$ clientes.
8. **Apartado c).** $1{,}05^{\,t} = \dfrac{15.000}{6.000} = 2{,}5$

   $t = \dfrac{\log 2{,}5}{\log 1{,}05} = 18{,}78$ años.

   $N(18) = 14.440$, no llega. $N(19) = 15.162$, sí. **19 años completos.**
9. «Veloz duplicará sus clientes al cabo de 14,21 años, es decir, durante el año 15, y superará los 15.000 al cabo de 19 años completos».

LA GRÁFICA



GLOSARIO

Logaritmo ($\log_a b$). Exponente al que hay que elevar la base a para obtener b.

Base (a). Número que se eleva. Debe ser positivo y distinto de 1.

Logaritmo decimal ($\log$). El de base 10. Es la tecla log de la calculadora.

Logaritmo neperiano ($\ln$). El de base $e = 2{,}718\ldots$ Sirve igual que el decimal para despejar.

Exponente. Número que indica cuántas veces se multiplica la base. Aquí es el tiempo t.

Potencia. La expresión completa a^t.

Factor anual. Número por el que se multiplica la cantidad cada año: $1 + \frac{p}{100}$ si crece un $p\,\%$ y $1 - \frac{p}{100}$ si disminuye.

Cantidad inicial (N_0). Valor en el momento de partida, $t = 0$.

Crecimiento exponencial. El de una magnitud que se multiplica por el mismo factor en cada periodo: $N(t) = N_0 \cdot a^t$.

Aislar la potencia. Dejarla sola en un miembro, pasando al otro lo que la multiplica.

Tomar logaritmos. Aplicar el logaritmo a los dos miembros de una igualdad. La igualdad se mantiene.

Propiedad de la potencia. $\log a^t = t \cdot \log a$. Es la que baja el exponente.

Tiempo de duplicación. El que tarda una magnitud en hacerse el doble. No depende de la cantidad inicial.

Años completos. Número entero de años. Se redondea hacia arriba, porque antes no se ha alcanzado la cifra.