BLOQUE III · ANÁLISIS

Unidad 13

Aplicaciones de la derivada

Crecimiento y signo de la derivada · puntos críticos · máximos y mínimos relativos · esbozo de una función · extremos en un intervalo cerrado · problemas de optimización · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. Casi todas las decisiones económicas consisten en buscar lo mejor posible con lo que se tiene: el precio que más ingresa, la producción que más beneficio deja, el reparto que menos cuesta. La derivada convierte esa búsqueda en una ecuación. Donde una función alcanza su valor más alto o más bajo, la tangente es horizontal, y eso se escribe $f'(x) = 0$.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Crecimiento	decir dónde crece y dónde decrece una función con el signo de f'
2. Puntos críticos	resolver $f'(x) = 0$ y montar la tabla de signos
3. Extremos relativos	hallar máximos y mínimos y justificarlos
4. Esbozo	dibujar una función polinómica a partir de su derivada
5. Intervalo cerrado	encontrar el valor más alto y el más bajo entre dos extremos
6. Optimización	pasar de un enunciado a una función y hallar su máximo o su mínimo

1. Teoría

1.1 · Crecimiento y signo de la derivada

PARA MEMORIZAR

La derivada es la pendiente de la tangente. Su **signo** dice hacia dónde va la función:

$f'(x) > 0$ en un intervalo f es **creciente** en él ↗

$f'(x) < 0$ en un intervalo f es **decreciente** en él ↘

1.2 · Puntos críticos y tabla de signos

PARA MEMORIZAR

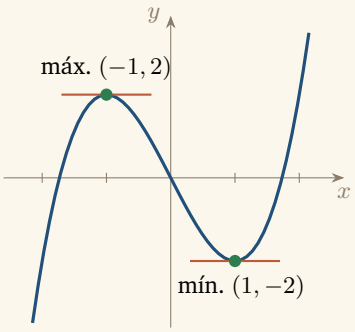
Punto crítico: valor de x en el que $f'(x) = 0$. En él la tangente es horizontal. Los puntos críticos son los únicos lugares donde una función derivable puede pasar de crecer a decrecer, o al revés.

Método. 1. Derivar. 2. Resolver $f'(x) = 0$. 3. Dividir la recta con los puntos críticos. 4. Probar el signo de f' con un número de cada zona. 5. Leer la tabla.

Ejemplo. $f(x) = x^3 - 3x$. $f'(x) = 3x^2 - 3$.
$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ y $x = 1$.
Números de prueba: $f'(-2) = 9$, $f'(0) = -3$, $f'(2) = 9$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
signo de f'	$+$	$-$	$+$
f	↗	↘	↗

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.



1.3 · Máximos y mínimos relativos

PARA MEMORIZAR

En un punto crítico $x = a$, se mira cómo cambia el signo de f' al pasar por él:

de $+$ a $-$ (↗ ↘)	**máximo relativo** en $(a,\ f(a))$
de $-$ a $+$ (↘ ↗)	**mínimo relativo** en $(a,\ f(a))$
el signo no cambia	no hay extremo

La ordenada del extremo se calcula con la **función**: $f(a)$.

Ejemplo. En $f(x) = x^3 - 3x$: en $x = -1$ la derivada pasa de $+$ a $-$, máximo relativo en $(-1,\ f(-1)) = (-1,\ 2)$. En $x = 1$ pasa de $-$ a $+$, mínimo relativo en $(1,\ -2)$.



AVISO · UN PUNTO CRÍTICO TODAVÍA NO ES UN EXTREMO

$f(x) = x^3$ tiene $f'(x) = 3x^2$, que se anula en $x = 0$. A los dos lados la derivada es positiva: la función crece, se queda horizontal un instante y sigue creciendo. En $x = 0$ no hay máximo ni mínimo. Por eso la tabla de signos es obligatoria.

1.4 · Esbozo de una función polinómica

Con la tabla de signos se dibuja la forma de la gráfica sin tabla de valores larga. Se marcan los extremos relativos y el corte con el eje Y, $f(0)$, y se unen siguiendo las flechas. En un polinomio, el término de mayor grado decide los dos extremos de la gráfica: con x^3 viene de abajo y termina arriba, y con $-x^3$ ocurre lo contrario.

1.5 · Extremos absolutos en un intervalo cerrado

PARA MEMORIZAR

En un intervalo cerrado $[a,\ b]$, el valor más alto y el más bajo de una función continua están en un punto crítico de dentro del intervalo o en uno de los dos bordes. Se calcula f en todos los candidatos y se comparan.

Ejemplo. $f(x) = x^3 - 3x$ en $[0,\ 3]$. Punto crítico dentro: $x = 1$ (el -1 queda fuera). Candidatos: $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(3) = 18$. Máximo absoluto, 18, en $x = 3$. Mínimo absoluto, -2, en $x = 1$.

1.6 · Problemas de optimización

PARA MEMORIZAR

Optimizar: encontrar el valor de una variable que hace máxima o mínima una cantidad.

1. **Variable.** Poner nombre, x, a lo que se puede elegir, y anotar entre qué valores puede moverse.
2. **Función.** Escribir la cantidad que se quiere optimizar. Si aparecen dos variables, la condición del enunciado permite despejar una.
3. **Derivar e igualar a cero.** Resolver $f'(x) = 0$ y descartar las soluciones sin sentido.
4. **Comprobar.** Con el signo de f' a los dos lados, confirmar que es un máximo o un mínimo.
5. **Responder** a lo que pregunta el enunciado, con unidades.



CONEXIÓN · EL MÁXIMO BENEFICIO Y EL MARGEN

El beneficio es ingreso menos coste, $B(x) = I(x) - C(x)$. Su derivada se anula cuando $I'(x) = C'(x)$: el beneficio es máximo cuando el ingreso marginal iguala al coste marginal. Es la regla que usarás en Economía, y sale de derivar e igualar a cero.



PARA EL EXAMEN · LO QUE SE PIDE CASI NUNCA ES x

El enunciado pregunta por un precio, unas dimensiones o un coste. La x es un paso intermedio. Antes de escribir la frase final, vuelve a leer la pregunta.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, resultado y conclusión.

RESUELTO 1 · Crecimiento de una parábola

Estudia el crecimiento de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ y halla su extremo.

Desarrollo. $f'(x) = 2x - 6$. $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$. Números de prueba: $f'(0) = -6 < 0$ y $f'(4) = 2 > 0$.
La función decrece en $(-\infty,\ 3)$ y crece en $(3,\ +\infty)$. $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$.
Conclusión. Mínimo relativo en $(\mathbf{3},\ \mathbf{-4})$. Es el vértice de la parábola, el mismo que daba $x_v = -\frac{b}{2a}$.

RESUELTO 2 · Crecimiento y extremos de una cúbica

Estudia el crecimiento y los extremos relativos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Planteamiento. Derivar, resolver $f'(x) = 0$ y montar la tabla de signos.
Desarrollo. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Dividiendo entre 3: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 3$.
Números de prueba: $f'(0) = 9$, $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$, $f'(4) = 48 - 48 + 9 = 9$.

	$(-\infty,\ 1)$	$(1,\ 3)$	$(3,\ +\infty)$
signo de f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$. $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$.
Resultado. Crece en $(-\infty,\ 1) \cup (3,\ +\infty)$ y decrece en $(1,\ 3)$.
Conclusión. Máximo relativo en $(\mathbf{1},\ \mathbf{5})$ y mínimo relativo en $(\mathbf{3},\ \mathbf{1})$.

RESUELTO 3 · Un punto crítico que no es extremo

Estudia los extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Desarrollo. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3\,(x-1)^2$. Se anula solo en $x = 1$.
Números de prueba: $f'(0) = 3 > 0$ y $f'(2) = 3 > 0$. El signo no cambia.
Conclusión. La función es creciente a los dos lados de $x = 1$: **no tiene extremos relativos**. En el punto $(1,\ 1)$ la tangente es horizontal y la gráfica sigue subiendo.

RESUELTO 4 · Extremos absolutos en un intervalo

Halla el valor máximo y el valor mínimo de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en el intervalo $[0,\ 4]$.

Planteamiento. Candidatos: los puntos críticos de dentro del intervalo y los dos bordes.
Desarrollo. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x\,(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$.
$f(0) = 2$. $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$. $f(4) = 64 - 48 + 2 = 18$.
Conclusión. El valor máximo es **18**, en el borde $x = 4$. El valor mínimo es $\mathbf{-2}$, en $x = 2$. El máximo absoluto no está en ningún punto crítico: por eso los bordes siempre se comprueban.

RESUELTO 5 · Hallar parámetros con un extremo

Halla a y b para que $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en el punto $(2,\ 1)$. ¿Es un máximo o un mínimo?

Planteamiento. El enunciado da dos condiciones. Hay extremo en $x = 2$: $f'(2) = 0$. La gráfica pasa por $(2,\ 1)$: $f(2) = 1$.
Desarrollo. $f'(x) = 3x^2 + 2ax$. $f'(2) = 12 + 4a = 0 \Rightarrow a = -3$.
$f(2) = 8 + 4a + b = 8 - 12 + b = 1 \Rightarrow b = 5$.
Con esos valores, $f'(x) = 3x^2 - 6x$. $f'(1) = -3 < 0$ y $f'(3) = 9 > 0$: pasa de decrecer a crecer.
Conclusión. $\mathbf{a = -3}$, $\mathbf{b = 5}$, y el extremo es un **mínimo relativo**.

RESUELTO 6 · El precio que más ingresa

Una tienda vende 40 camisetas al día a 20 €. Ha comprobado que, por cada euro que rebaja el precio, vende 4 camisetas más. ¿A qué precio debe venderlas para que el ingreso diario sea máximo? ¿Cuál es ese ingreso?

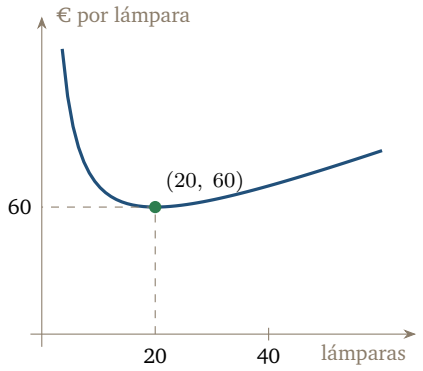
Planteamiento. Variable: x, los euros de rebaja, con $0 \le x \le 20$. El ingreso es precio por cantidad.
Desarrollo. Precio: $20 - x$. Camisetas: $40 + 4x$.
$I(x) = (20 - x)(40 + 4x) = 800 + 80x - 40x - 4x^2 = -4x^2 + 40x + 800$.

$I'(x) = -8x + 40 = 0 \Rightarrow x = 5$.
Comprobación: $I'(4) = 8 > 0$ e $I'(6) = -8 < 0$. El ingreso crece hasta $x = 5$ y después baja: es un máximo.
Precio: $20 - 5 = 15$ €. Camisetas: $40 + 20 = 60$. Ingreso: $15 \cdot 60 = 900$ €.
Resultado. $x = 5$; precio, 15 €; ingreso, 900 €.
Conclusión. Debe venderlas a **15 €**, y el ingreso diario será de **900 €**, frente a los 800 € actuales. La respuesta es el precio: la rebaja de 5 € era el paso intermedio.

RESUELTO 7 · El coste medio mínimo

El coste de fabricar x lámparas es $C(x) = x^2 + 20x + 400$ euros. ¿Cuántas lámparas hay que fabricar para que el coste por lámpara sea mínimo? ¿Cuánto cuesta entonces cada una?

Planteamiento. El coste por lámpara, o coste medio, es el coste total entre el número de lámparas. Esa es la función que hay que hacer mínima, con $x > 0$.



Desarrollo. $M(x) = \dfrac{x^2 + 20x + 400}{x} = x + 20 + \dfrac{400}{x}$.
$M'(x) = 1 - \dfrac{400}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20$.
La solución $x = -20$ no tiene sentido.
Comprobación: $M'(10) = 1 - 4 = -3 < 0$ y $M'(40) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 > 0$. Decrece y después crece: es un mínimo.
$M(20) = 20 + 20 + 20 = 60$.
Resultado. $x = 20$; $M(20) = 60$.
Conclusión. Hay que fabricar **20 lámparas**, y cada una cuesta **60 €**. Con pocas lámparas, los 400 € fijos pesan mucho en cada una. Con muchas, el coste de producir se dispara. El mínimo está donde las dos fuerzas se compensan.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Resolver $f(x) = 0$ en lugar de $f'(x) = 0$: eso da los cortes con el eje.
- Dar un punto crítico como máximo o mínimo sin mirar el signo de f' a los dos lados.
- Calcular la ordenada del extremo con la derivada: $f'(a)$ vale 0, y la altura es $f(a)$.
- En un intervalo cerrado, olvidar los bordes.
- En un problema, derivar una función con dos variables sin haber sustituido la condición.
- Dar por buena una solución negativa o fuera del intervalo que permite el enunciado.
- Responder con el valor de x cuando se pregunta por otra cosa, o sin unidades.

3. Ejercicios propuestos

Soluciones en el apartado 5, con la resolución completa de los ejercicios 13 y 14.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. ¿En qué intervalos crece y en cuáles decrece $f(x) = x^2 - 4x + 1$?

2. Halla los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 3x$.

3. Halla el extremo de $f(x) = -x^2 + 8x - 7$ y di si es máximo o mínimo.

4. De una función se sabe que $f'(x) > 0$ en $(-\infty,\ -2)$, $f'(x) < 0$ en $(-2,\ 3)$ y $f'(x) > 0$ en $(3,\ +\infty)$. ¿Dónde tiene sus extremos relativos y de qué tipo son?

5. El beneficio de una empresa al vender x unidades es $B(x) = -2x^2 + 80x - 300$ euros. ¿Cuántas unidades dan el beneficio máximo? ¿Cuál es?

NIVEL 2 · APLICAR

6. Estudia el crecimiento y los extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

7. Halla los extremos relativos de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ y esboza su gráfica.

8. Halla el valor máximo y el mínimo de $f(x) = x^3 - 12x$ en el intervalo $[-3,\ 5]$.

9. Dos números positivos suman 20. ¿Cuáles son si su producto es el mayor posible?

10. Con 120 m de valla se quiere cercar un huerto rectangular pegado a un muro, que hace de uno de los lados. ¿Qué dimensiones dan la mayor superficie? ¿Cuál es?

NIVEL 3 · PENSAR

11. Estudia el crecimiento y los extremos relativos de $f(x) = x^4 - 2x^2$.

12. Halla a y b para que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 3$. Di cuál es el máximo y cuál el mínimo.

13. El coste de producir x mesas en una carpintería es $C(x) = 2x^2 + 10x + 800$ euros. ¿Cuántas mesas hacen mínimo el coste por mesa? ¿Cuánto cuesta entonces cada una?

14. De cada esquina de una lámina cuadrada de cartón de 30 cm de lado se recorta un cuadrado de lado x, y se doblan los bordes para formar una caja sin tapa. ¿Qué valor de x da la caja de mayor volumen? ¿Cuál es ese volumen?

15. Estudia el crecimiento y los extremos relativos de $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · El obrador Masa Madre

El beneficio semanal de un obrador de pan, en cientos de euros, es $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x - 20$, donde x son los miles de barras que hornea a la semana. El horno permite hornear, como mucho, 8.000 barras: $0 \le x \le 8$.

a) Halla el beneficio marginal y los puntos críticos. ¿Cuál hay que descartar y por qué?

b) Estudia en qué tramo de producción el beneficio crece y en cuál decrece.

c) ¿Cuántas barras dan el beneficio máximo? ¿De cuánto es?

d) Calcula el beneficio con el horno parado y con el horno al máximo de su capacidad. ¿Cuál es el peor resultado posible?

e) Calcula $B'(2)$ e interprétalo.

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

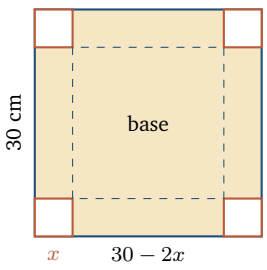
1. $f'(x) = 2x - 4$. Decrece en $(-\infty,\ 2)$ y crece en $(2,\ +\infty)$.
2. $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ y $x = 1$.
3. $f'(x) = -2x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4$; $f(4) = 9$. La derivada pasa de $+$ a $-$: máximo en $(4,\ 9)$.
4. Máximo relativo en $x = -2$ (de crecer a decrecer) y mínimo relativo en $x = 3$.
5. $B'(x) = -4x + 80 = 0 \Rightarrow x = 20$ unidades. $B(20) = -800 + 1.600 - 300 = 500$ €.
6. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3\,(x+1)(x-3)$. Crece en $(-\infty,\ -1) \cup (3,\ +\infty)$ y decrece en $(-1,\ 3)$. Máximo en $(-1,\ 10)$ y mínimo en $(3,\ -22)$.
7. $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6\,(x-1)(x-2)$. Máximo en $(1,\ 5)$ y mínimo en $(2,\ 4)$. La gráfica pasa por $(0,\ 0)$, sube hasta $(1,\ 5)$, baja hasta $(2,\ 4)$ y vuelve a subir.
8. Críticos: $x = -2$ y $x = 2$. $f(-3) = 9$, $f(-2) = 16$, $f(2) = -16$, $f(5) = 65$. Máximo 65, en $x = 5$. Mínimo -16, en $x = 2$.
9. $P(x) = x\,(20 - x) = 20x - x^2$; $P'(x) = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$. Los números son 10 y 10, y su producto, 100.
10. Lados perpendiculares al muro, x; lado paralelo, $120 - 2x$. $A(x) = 120x - 2x^2$; $A'(x) = 120 - 4x = 0 \Rightarrow x = 30$. Dimensiones: 30 m por 60 m. Superficie: 1.800 m^2.
11. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\,(x-1)(x+1)$. Signos: $-$, $+$, $-$, $+$. Mínimos en $(-1,\ -1)$ y $(1,\ -1)$; máximo en $(0,\ 0)$.
12. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ debe ser $3\,(x-1)(x-3) = 3x^2 - 12x + 9$: $a = -6$, $b = 9$. Máximo en $x = 1$, con $f(1) = 4$, y mínimo en $x = 3$, con $f(3) = 0$.
13. 20 mesas, a 90 € cada una (resolución completa a continuación).
14. $x = 5$ cm; volumen, 2.000 cm^3 (resolución completa a continuación).
15. Producto y cadena: $f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1 - x)\,e^{-x}$. Como $e^{-x} > 0$, el signo es el de $1 - x$. Crece en $(-\infty,\ 1)$, decrece en $(1,\ +\infty)$. Máximo en $\left(1,\ \dfrac{1}{e}\right)$, con $\dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$.

Resolución completa del ejercicio 13

Planteamiento. Variable: x, el número de mesas, con $x > 0$. La función que se hace mínima es el coste por mesa.
Desarrollo. $M(x) = \dfrac{2x^2 + 10x + 800}{x} = 2x + 10 + \dfrac{800}{x}$.
$M'(x) = 2 - \dfrac{800}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 800 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20$. La solución negativa se descarta.
Comprobación: $M'(10) = 2 - 8 = -6 < 0$ y $M'(40) = 2 - 0{,}5 = 1{,}5 > 0$. Mínimo.
$M(20) = 40 + 10 + 40 = 90$.
Resultado. $x = 20$; $M(20) = 90$.
Conclusión. El coste por mesa es mínimo fabricando **20 mesas**, y entonces cada una cuesta **90 €**. El coste total, $C(20) = 1.800$ €, no es el mínimo posible: lo que se ha hecho mínimo es el reparto de ese coste entre las mesas.

Resolución completa del ejercicio 14

Planteamiento. Variable: x, el lado del cuadrado recortado, en cm. La base de la caja es un cuadrado de lado $30 - 2x$ y la altura es x. Para que haya caja, $0 < x < 15$.
Desarrollo. $V(x) = x\,(30 - 2x)^2 = x\,(900 - 120x + 4x^2) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$.
$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 0$. Entre 12: $x^2 - 20x + 75 = 0 \Rightarrow x = 5$ y $x = 15$.
$x = 15$ queda fuera: no dejaría base. Queda $x = 5$.



Comprobación: $V'(1) = 12 - 240 + 900 = 672 > 0$ y $V'(10) = 1.200 - 2.400 + 900 = -300 < 0$. Máximo.
$V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2.000$.
Resultado. $x = 5$; $V(5) = 2.000$.
Conclusión. Hay que recortar cuadrados de **5 cm** de lado. La caja mide 20 cm por 20 cm de base y 5 cm de alto, y su volumen es de **2.000 cm**^{3}.

Ejercicio de síntesis

a) $B'(x) = -3x^2 + 12x + 15$. Entre -3: $x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1$ y $x = 5$. Se descarta $x = -1$: la producción no puede ser negativa.
b) $B'(1) = -3 + 12 + 15 = 24 > 0$ y $B'(6) = -108 + 72 + 15 = -21 < 0$. El beneficio crece entre 0 y 5.000 barras y decrece entre 5.000 y 8.000.
c) Máximo en $x = 5$. $B(5) = -125 + 150 + 75 - 20 = 80$. Con **5.000 barras** el beneficio es de 80 cientos de euros: **8.000 €** semanales.
d) $B(0) = -20$: con el horno parado se pierden 2.000 €, los costes fijos. $B(8) = -512 + 384 + 120 - 20 = -28$: al máximo de capacidad se pierden 2.800 €. El peor resultado es hornear 8.000 barras.
e) $B'(2) = -12 + 24 + 15 = 27$. Con 2.000 barras semanales, hornear mil más aumenta el beneficio en unos 27 cientos de euros, 2.700 €.
Conclusión. Al obrador le conviene hornear **5.000 barras** a la semana. Producir más es posible, y cada barra de más resta beneficio: a partir de ese punto el coste marginal supera al ingreso marginal.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Decir dónde crece y dónde decrece una función con el signo de su derivada.
- ☐ Hallar los puntos críticos y montar la tabla de signos con números de prueba.
- ☐ Distinguir un máximo, un mínimo y un punto crítico que no es extremo.
- ☐ Calcular la ordenada de un extremo con la función.
- ☐ Esbozar una función polinómica a partir de su tabla de signos.
- ☐ Encontrar el valor más alto y el más bajo en un intervalo cerrado, bordes incluidos.
- ☐ Hallar parámetros a partir de un extremo conocido.
- ☐ Traducir un enunciado a una función de una sola variable.
- ☐ Resolver un problema de optimización, comprobarlo y responder con unidades.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 13 · TODO EN MEDIA CARA

Crecimiento	$f' > 0$: crece $\nearrow$ · $f' < 0$: decrece $\searrow$
Punto crítico	$f'(x) = 0$ tangente horizontal
Máximo relativo	f' pasa de $+$ a $-$ punto $(a,\ f(a))$
Mínimo relativo	f' pasa de $-$ a $+$ punto $(a,\ f(a))$
Sin extremo	f' no cambia de signo
Intervalo $[a,\ b]$	comparar f en los puntos críticos de dentro y en los bordes a y b
Optimización	variable $\to$ función de una variable $\to$ $f'(x) = 0$ $\to$ comprobar $\to$ responder
Economía	ingreso $=$ precio $\cdot$ cantidad · coste medio $= \dfrac{C(x)}{x}$ · $B = I - C$