BLOQUE III · ANÁLISIS

Unidad 12

Derivadas

Tasa de variación media · derivada en un punto · la función derivada · reglas de derivación · regla de la cadena · la recta tangente · coste e ingreso marginal · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. Saber cuánto vale una magnitud importa menos que saber a qué ritmo está cambiando. Una empresa quiere conocer cuánto le cuesta fabricar una unidad más, y un banco central, a qué velocidad suben los precios. La derivada mide ese ritmo en cada instante. Es la herramienta más usada en economía, y en la unidad siguiente servirá para encontrar máximos y mínimos sin necesidad de dibujar.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Tasa de variación media	calcular el cambio medio de una función en un intervalo
2. Derivada en un punto	hallarla con la definición y explicar qué mide
3. Reglas de derivación	derivar polinomios, productos y cocientes
4. Regla de la cadena	derivar potencias, exponenciales y logaritmos de una función
5. Recta tangente	escribir la ecuación de la tangente en un punto
6. Marginalidad	interpretar la derivada de un coste, un ingreso o un beneficio

1. Teoría

1.1 · Tasa de variación media

PARA MEMORIZAR

Tasa de variación media de f en el intervalo $[a,\ b]$: lo que cambia la función por cada unidad que avanza x, de media, entre a y b.

$$\text{TVM}[a,\ b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es la pendiente de la recta **secante**, la que une los puntos $(a,\ f(a))$ y $(b,\ f(b))$.

Ejemplo. $f(x) = x^2$ en $[1,\ 3]$: $\text{TVM} = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{9 - 1}{2} = 4$. Entre $x = 1$ y $x = 3$ la función sube, de media, 4 unidades por cada unidad de x.

1.2 · Derivada en un punto

La tasa media describe un intervalo. Para saber a qué ritmo cambia la función justo en un punto se toman intervalos cada vez más pequeños que empiezan en él, y se mira hacia dónde va la tasa media.

PARA MEMORIZAR

Derivada de f en $x = a$: límite de la tasa de variación media cuando el intervalo se reduce a un punto.

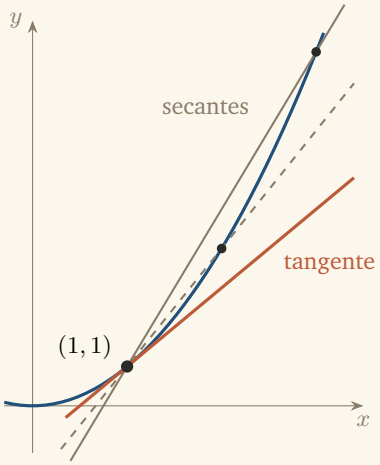
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Mide el **ritmo de cambio instantáneo** de la función en a. Geométricamente es la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica en el punto $(a,\ f(a))$.

Ejemplo. $f(x) = x^2$ en $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = 2$$

Las secantes que pasan por $(1, 1)$ y por un punto cada vez más cercano se van acercando a una recta de pendiente 2: la tangente.
Si $f'(a) > 0$, la función crece en ese punto. Si $f'(a) < 0$, decrece. Si $f'(a) = 0$, la tangente es horizontal.



1.3 · La función derivada y sus reglas

Calcular cada derivada con el límite sería muy lento. La **función derivada**, $f'(x)$, da la derivada en cualquier punto, y se obtiene con unas pocas reglas.

PARA MEMORIZAR

Función	Derivada	Operación	Derivada
k (constante)	0	$k \cdot f$	$k \cdot f'$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$f \pm g$	$f' \pm g'$
e^x	e^x	$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
a^x	$a^x \ln a$	$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$		

Ejemplos. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 10x + 2$.
La regla de la potencia sirve también para raíces y fracciones, escritas como potencias: $\dfrac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ y $\sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\,x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.



AVISO · PRODUCTO Y COCIENTE TIENEN REGLA PROPIA

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$. Y en el cociente el orden importa: primero la derivada del numerador por el denominador, y se **resta** el numerador por la derivada del denominador. El denominador se deja al cuadrado, sin desarrollar.

1.4 · La regla de la cadena

PARA MEMORIZAR

Cuando una función está «dentro» de otra, se deriva la de fuera, dejando la de dentro como está, y se **multiplica por la derivada de la de dentro**.

$$\left(u^n\right)' = n\,u^{n-1}\cdot u' \qquad \left(e^u\right)' = e^u\cdot u' \qquad \left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$$

Ejemplos. $(2x-5)^4 \Rightarrow 4\,(2x-5)^3\cdot 2 = 8\,(2x-5)^3$ $\qquad e^{3x} \Rightarrow 3\,e^{3x}$ $\qquad \ln(x^2+1) \Rightarrow \dfrac{2x}{x^2+1}$

1.5 · La recta tangente

PARA MEMORIZAR

Recta tangente a la gráfica de f en $x=a$: pasa por el punto $(a,\ f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$.

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$

Hacen falta tres cosas: el punto, la derivada y el valor de la derivada en el punto.

Ejemplo. Tangente a $f(x)=x^2$ en $x=1$. Punto: $f(1)=1$. Derivada: $f'(x)=2x$. Pendiente: $f'(1)=2$. Recta: $y-1=2\,(x-1) \Rightarrow y=2x-1$.

1.6 · La derivada en economía: magnitudes marginales

PARA MEMORIZAR

Si $C(x)$ es el coste de producir x unidades, su derivada $C'(x)$ es el **coste marginal**: aproximadamente, lo que cuesta producir una unidad más cuando ya se producen x. Lo mismo ocurre con el **ingreso marginal**, $I'(x)$, y con el **beneficio marginal**, $B'(x)$.



CONEXIÓN · PENSAR «EN EL MARGEN»

En Economía se repite que las decisiones se toman en el margen: se compara lo que aporta una unidad más con lo que cuesta. Esa unidad más es la derivada. Mientras el ingreso marginal supere al coste marginal, producir una unidad más aumenta el beneficio.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, resultado y conclusión.

RESUELTO 1 · Tasa de variación media

Calcula la tasa de variación media de $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[1,\ 3]$.

Desarrollo. $f(1) = 2$ y $f(3) = 10$. $\text{TVM}[1,\ 3] = \dfrac{10-2}{3-1} = \dfrac{8}{2} = 4$.
Conclusión. La tasa de variación media es **4**: es la pendiente de la secante que une $(1, 2)$ y $(3, 10)$.

RESUELTO 2 · Derivada con la definición

Calcula, usando la definición, la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$.

Planteamiento. Se escribe el cociente con $a = 3$, se opera el numerador y se simplifica la h antes de tomar el límite.
Desarrollo. $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\,(6+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (6+h) = 6$.
Comprobación. Con la regla: $f'(x) = 2x$, y $f'(3) = 6$.
Conclusión. $f'(3) = \mathbf{6}$. Al sustituir $h = 0$ directamente saldría $\frac{0}{0}$: por eso hay que simplificar antes.

RESUELTO 3 · Derivadas con la regla de la potencia

Deriva: a) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ c) $h(x) = \sqrt{x}$

Desarrollo. a) Término a término: $f'(x) = 12x^3 - 10x + 2$. La constante -7 desaparece.
b) $g(x) = x^{-1} \Rightarrow g'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.
c) $h(x) = x^{1/2} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{2}\,x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Conclusión. $\mathbf{12x^3 - 10x + 2}$; $\mathbf{-\dfrac{1}{x^2}}$; $\mathbf{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$.

RESUELTO 4 · Producto y cociente

Deriva: a) $f(x) = (2x+1)(x^2-3)$ b) $g(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

Desarrollo. a) Producto: $f'(x) = 2\,(x^2-3) + (2x+1)\cdot 2x = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.
b) Cociente: $g'(x) = \dfrac{3\,(x+2) - (3x-1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2} = \dfrac{7}{(x+2)^2}$.
Conclusión. $\mathbf{6x^2 + 2x - 6}$; $\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{(x+2)^2}}$. En el cociente, el paréntesis del segundo término evita el error de signo.

RESUELTO 5 · Regla de la cadena

Deriva: a) $f(x) = (2x-5)^4$ b) $g(x) = e^{3x}$ c) $h(x) = \ln(x^2+1)$

Planteamiento. En cada una hay una función dentro de otra. Se identifica la de dentro, u, y su derivada.
Desarrollo. a) $u = 2x-5$, $u' = 2$. $f'(x) = 4\,(2x-5)^3 \cdot 2 = 8\,(2x-5)^3$.
b) $u = 3x$, $u' = 3$. $g'(x) = e^{3x}\cdot 3 = 3\,e^{3x}$.
c) $u = x^2+1$, $u' = 2x$. $h'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Conclusión. $\mathbf{8\,(2x-5)^3}$; $\mathbf{3\,e^{3x}}$; $\dfrac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x^2+1}}$.

RESUELTO 6 · Recta tangente

Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Planteamiento. Hacen falta el punto y la pendiente.
Desarrollo. Punto: $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$. Es $(2,\ -1)$.
Derivada: $f'(x) = 2x - 3$. Pendiente: $f'(2) = 4 - 3 = 1$.
Recta: $y - (-1) = 1\cdot(x-2) \Rightarrow y + 1 = x - 2 \Rightarrow y = x - 3$.
Comprobación. La recta pasa por el punto: $2 - 3 = -1$.
Conclusión. La recta tangente es $\mathbf{y = x - 3}$.

RESUELTO 7 · Coste marginal

El coste de fabricar x unidades de un producto es $C(x) = 0{,}01x^2 + 5x + 200$ euros. Halla el coste marginal cuando se fabrican 100 unidades e interprétalo.

Planteamiento. El coste marginal es la derivada del coste.
Desarrollo. $C'(x) = 0{,}02x + 5$. $C'(100) = 2 + 5 = 7$.
Comprobación. Coste real de la unidad 101: $C(101) - C(100) = 807{,}01 - 800 = 7{,}01$ €.
Conclusión. El coste marginal es de **7 € por unidad**: cuando ya se fabrican 100, producir una más cuesta aproximadamente 7 €. La derivada da ese valor sin restar dos costes.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Derivar un producto multiplicando las dos derivadas.
- En el cociente, cambiar el orden de los términos del numerador o perder el signo menos.
- Olvidar la derivada de la función de dentro en la regla de la cadena.
- Derivar una constante que suma como si fuera x: la derivada de 7 es 0, y la de $7x$ es 7.
- En la recta tangente, usar $f(a)$ como pendiente o $f'(a)$ como ordenada del punto.
- Dejar la recta tangente con la x sin sustituir en la pendiente: la pendiente es un número.
- No interpretar una derivada cuando el problema tiene contexto.

3. Ejercicios propuestos

Soluciones en el apartado 5, con la resolución completa de los ejercicios 13 y 14.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Calcula la tasa de variación media de $f(x) = x^2 - 2x$ en $[1,\ 4]$.

2. Deriva: a) x^5 b) $4x^3 - 2x + 9$ c) 7 d) $\dfrac{x^2}{2} - 3x$

3. Dada $f(x) = x^3 - 2x$, calcula $f'(2)$.

4. Deriva: a) $\dfrac{1}{x^2}$ b) $3\sqrt{x}$

5. Halla la recta tangente a $y = x^2$ en $x = 1$.

NIVEL 2 · APLICAR

6. Deriva $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$.

7. Deriva: a) $\dfrac{x+1}{x-1}$ b) $\dfrac{x^2}{x+3}$

8. Deriva: a) $(3x + 1)^5$ b) e^{x^2} c) $\ln(5x - 2)$

9. Halla la recta tangente a $f(x) = x^3 - 3x$ en $x = 2$.

10. Calcula con la definición la derivada de $f(x) = x^2 + x$ en $x = 1$.

NIVEL 3 · PENSAR

11. ¿En qué puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 12x$ es horizontal la recta tangente?

12. Halla la recta tangente a $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 2$.

13. Los ingresos de una empresa al vender x unidades son $I(x) = 50x - 0{,}1x^2$ euros. a) Halla la función de ingreso marginal. b) Calcula el ingreso marginal para 100 unidades e interprétalo. c) ¿Para qué número de unidades el ingreso marginal es cero? ¿Qué ocurre a partir de ahí?

14. Halla la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 10$ que es paralela a la recta $y = 2x + 1$.

15. Halla a y b para que la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx$ pase por el punto $(1,\ 3)$ y tenga en él una tangente de pendiente 4.

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · Los beneficios de Zumos Albufera

El beneficio diario de Zumos Albufera, en euros, es $B(x) = -0{,}5x^2 + 40x - 300$, donde x son las cajas de zumo vendidas.
a) Calcula la tasa de variación media del beneficio entre 10 y 20 cajas.
b) Halla el beneficio marginal. Calcúlalo para 10 cajas y para 50 cajas, e interpreta los dos resultados.
c) Halla la recta tangente a la gráfica en $x = 20$.
d) Usa esa recta para estimar el beneficio con 21 cajas y compáralo con el valor real.
e) ¿Para qué número de cajas el beneficio marginal es cero? ¿Cuál es el beneficio en ese punto y cómo es allí la tangente?

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. $f(1) = -1$, $f(4) = 8$. TVM $= \dfrac{8-(-1)}{3} = 3$.
2. a) $5x^4$; b) $12x^2 - 2$; c) 0; d) $x - 3$.
3. $f'(x) = 3x^2 - 2$; $f'(2) = 10$.
4. a) $x^{-2} \Rightarrow -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$; b) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.
5. $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$: $y = 2x - 1$.
6. $2x\,(3x-2) + (x^2+1)\cdot 3 = 9x^2 - 4x + 3$.
7. a) $\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$; b) $\dfrac{2x\,(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}$.
8. a) $15\,(3x+1)^4$; b) $2x\,e^{x^2}$; c) $\dfrac{5}{5x-2}$.
9. $f(2) = 2$; $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(2) = 9$. $y - 2 = 9\,(x-2) \Rightarrow y = 9x - 16$.
10. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 + (1+h) - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h + h^2}{h} = 3$.
11. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Puntos $(2,\ -16)$ y $(-2,\ 16)$.
12. $f(2) = \dfrac{1}{2}$; $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$. $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}\,(x-2) \Rightarrow y = -\dfrac{x}{4} + 1$.
13. $I'(x) = 50 - 0{,}2x$; $I'(100) = 30$ €; se anula en $x = 250$ (resolución completa a continuación).
14. $y = 2x - 6$, tangente en el punto $(4,\ 2)$ (resolución completa a continuación).
15. Pasa por $(1, 3)$: $a + b = 3$. Pendiente 4 en $x = 1$: $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 2a + b = 4$. Restando, $a = 1$ y $b = 2$.

Resolución completa del ejercicio 13

a) Planteamiento. El ingreso marginal es la derivada del ingreso: $I'(x) = 50 - 0{,}2x$.
b) Desarrollo. $I'(100) = 50 - 20 = 30$. Cuando ya se venden 100 unidades, vender una más aumenta los ingresos en unos 30 €. Valor real: $I(101) - I(100) = 4.029{,}90 - 4.000 = 29{,}90$ €.
c) $50 - 0{,}2x = 0 \Rightarrow x = 250$ unidades. Para $x < 250$ el ingreso marginal es positivo: cada unidad adicional suma ingresos. Para $x > 250$ es negativo: cada unidad adicional los reduce, porque para venderla hay que bajar demasiado el precio.
Resultado. $I'(x) = 50 - 0{,}2x$; $I'(100) = 30$; $I'(x) = 0$ en $x = 250$.
Conclusión. El ingreso crece hasta las **250 unidades**, donde alcanza su valor más alto, $I(250) = 12.500 - 6.250 = 6.250$ €, y a partir de ahí disminuye. El punto donde la derivada vale cero es el máximo de la parábola.

Resolución completa del ejercicio 14

Planteamiento. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente. La recta $y = 2x + 1$ tiene pendiente 2, así que se busca el punto de la gráfica donde la derivada vale 2.
Desarrollo. $f'(x) = 2x - 6$. $\quad 2x - 6 = 2 \Rightarrow x = 4$.
Punto: $f(4) = 16 - 24 + 10 = 2$. Es $(4,\ 2)$.
Recta: $y - 2 = 2\,(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 6$.
Comprobación. Pasa por el punto, $8 - 6 = 2$, y tiene pendiente 2, la misma que $y = 2x + 1$.
Resultado. $\mathbf{y = 2x - 6}$.
Conclusión. En los ejercicios de tangente no siempre dan el punto. Cuando dan la pendiente, la ecuación $f'(x) = m$ lo descubre.

Ejercicio de síntesis

a) $B(10) = -50 + 400 - 300 = 50$. $B(20) = -200 + 800 - 300 = 300$. TVM$[10,\ 20] = \dfrac{300 - 50}{10} = 25$ € por caja.
b) $B'(x) = -x + 40$. $B'(10) = 30$: con 10 cajas vendidas, una más aumenta el beneficio en unos 30 €. $B'(50) = -10$: con 50 cajas, una más lo reduce en unos 10 €.
c) Punto $(20,\ 300)$. Pendiente $B'(20) = 20$. $y - 300 = 20\,(x - 20) \Rightarrow y = 20x - 100$.
d) Estimación: $20 \cdot 21 - 100 = 320$ €. Valor real: $B(21) = -220{,}5 + 840 - 300 = 319{,}50$ €. La tangente se equivoca en 50 céntimos.
e) $-x + 40 = 0 \Rightarrow x = 40$ cajas. $B(40) = -800 + 1.600 - 300 = 500$ €. La tangente es horizontal: $y = 500$.
Conclusión. El beneficio crece mientras el beneficio marginal es positivo, hasta las **40 cajas**, donde vale **500 €**, y después baja. Cerca de un punto, la recta tangente sustituye bien a la curva: por eso la derivada sirve para estimar el efecto de vender una caja más.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Calcular una tasa de variación media y decir qué recta representa.
- ☐ Hallar una derivada con la definición, simplificando antes de tomar el límite.
- ☐ Explicar qué mide la derivada en un punto.
- ☐ Derivar polinomios, raíces y fracciones sencillas con la regla de la potencia.
- ☐ Derivar un producto y un cociente.
- ☐ Aplicar la regla de la cadena a potencias, exponenciales y logaritmos.
- ☐ Escribir la recta tangente en un punto y comprobarla.
- ☐ Encontrar los puntos de tangente horizontal o de pendiente dada.
- ☐ Interpretar un coste, un ingreso o un beneficio marginal.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 12 · TODO EN MEDIA CARA

Tasa media	$\text{TVM}[a,\ b] = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pendiente de la secante
Derivada en un punto	$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pendiente de la tangente
Derivadas básicas	$k \to 0 \cdot x^n \to n\,x^{n-1} \cdot e^x \to e^x \cdot a^x \to a^x \ln a \cdot \ln x \to \dfrac{1}{x}$
Operaciones	$(f \pm g)' = f' \pm g' \cdot (f \cdot g)' = f'g + fg' \cdot \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
Cadena	$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \cdot (e^u)' = e^u\,u' \cdot (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
Recta tangente	$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$
Marginal	$C'(x)$, $I'(x)$, $B'(x)$: efecto aproximado de una unidad más

$f'(a) > 0$: la función crece en a · $f'(a) < 0$: decrece · $f'(a) = 0$: tangente horizontal.