BLOQUE III · ANÁLISIS

Unidad 11

Límites y continuidad

La idea de límite · límites laterales · indeterminaciones · límites en el infinito · continuidad y tipos de discontinuidad · asíntotas verticales, horizontales y oblicuas · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. ¿A qué valor se acerca el coste por unidad cuando una fábrica produce cada vez más? ¿Cambia de golpe una tarifa al pasar de un tramo a otro? Las dos preguntas se contestan con un límite. El límite describe hacia dónde va una función, tanto cerca de un punto como muy lejos, y con él se define con precisión qué es una función continua. Es también la herramienta sobre la que se construye la derivada en la unidad siguiente.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Límite en un punto	calcular un límite por sustitución y con límites laterales
2. Indeterminaciones	resolver un $\frac{0}{0}$ factorizando y estudiar un $\frac{k}{0}$ con los laterales
3. Límites en el infinito	hallar el límite de un cociente de polinomios comparando grados
4. Continuidad	estudiar la continuidad de una función a trozos y clasificar sus discontinuidades
5. Continuidad con parámetro	hallar el valor que hace continua una función
6. Asíntotas	hallar las asíntotas de una función racional e interpretarlas

1. Teoría

1.1 · La idea de límite

PARA MEMORIZAR

Límite de f cuando x tiende a a: valor al que se acercan los resultados $f(x)$ cuando x se acerca a a, sin llegar a valer a. Se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Límites laterales: $\lim_{x\to a^-} f(x)$ es el valor al que se acerca f cuando x se acerca a a por la izquierda, con valores menores que a. $\lim_{x\to a^+} f(x)$, por la derecha, con valores mayores.

El límite **existe** cuando los dos laterales existen y **coinciden**.

Ejemplo. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ no se puede calcular en $x = 2$. Cerca de 2, sí:

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,9	3,99	3,999	no existe	4,001	4,01	4,1

Por los dos lados los resultados se acercan a 4: $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. El límite no depende de lo que pase justo en el punto, solo de lo que pasa a su alrededor.

1.2 · Cálculo de límites en un punto

PARA MEMORIZAR

Primer paso, siempre: sustituir. Si al sustituir x por a sale un número, ese número es el límite.

- Si sale $\frac{0}{0}$, es una **indeterminación**. Se factorizan numerador y denominador, se simplifica el factor común y se vuelve a sustituir.
- Si sale $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$, el límite es infinito. Hay que estudiar los **dos laterales** para saber si es $+\infty$ o $-\infty$ por cada lado, mirando el signo del denominador.

Ejemplo de $\frac{0}{0}$. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$.

Ejemplo de $\frac{k}{0}$. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$. Por la izquierda, $x-1$ es negativo y muy pequeño: $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$.

Por la derecha es positivo: $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$. Los laterales no coinciden.

1.3 · Límites en el infinito

PARA MEMORIZAR

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ describe hacia dónde va la función cuando x crece sin parar. Para un **cociente de polinomios** basta comparar los grados:

grado del numerador $<$ grado del denominador	el límite es 0
grados iguales	el límite es el cociente de los coeficientes principales
grado del numerador $>$ grado del denominador	el límite es $+\infty$ o $-\infty$

Ejemplos. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3} = \dfrac{2}{1} = 2$ $\quad$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+5}{x^2+1} = 0$ $\quad$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x+2} = +\infty$

La razón: para valores enormes de x, en cada polinomio solo cuenta el término de mayor grado. En el primero, $\dfrac{2x^2}{x^2} = 2$.

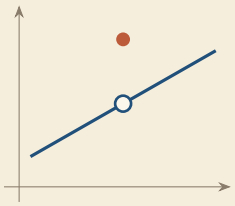
1.4 · Continuidad

PARA MEMORIZAR

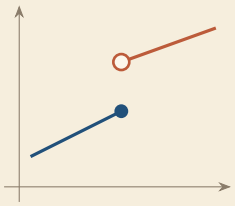
Una función es **continua en** $x = a$ si se cumplen tres condiciones:

1. Existe $f(a)$.
2. Existe $\lim_{x\to a} f(x)$: los dos laterales coinciden.
3. El límite y el valor son iguales: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

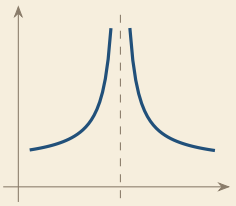
Los polinomios son continuos en todo $\mathbb{R}$. Un cociente de polinomios es continuo salvo donde se anula el denominador. En una **función a trozos** solo hay que estudiar los puntos donde cambia la fórmula.



Evitable
hay límite, pero no coincide con $f(a)$



De salto finito
los laterales son distintos



De salto infinito
algún lateral es infinito



AVISO · «CONTINUA» SIGNIFICA LAS TRES COSAS

En una función a trozos no basta con que los dos laterales coincidan. Hay que mirar además cuánto vale la función en el punto, con la fórmula que lleva el signo igual. En el examen se escriben los tres valores, $f(a)$ y los dos laterales, y se comparan.

1.5 · Asíntotas

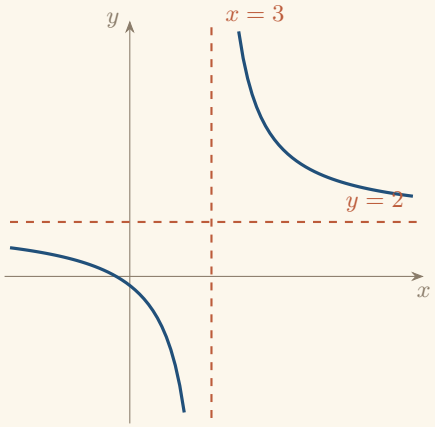
Una asíntota es una recta a la que la gráfica se acerca cada vez más sin llegar a confundirse con ella.

PARA MEMORIZAR

- **Asíntota vertical** $x = a$: cuando $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. En una función racional se buscan en los valores que anulan el denominador y no el numerador.
- **Asíntota horizontal** $y = L$: cuando $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$. Existe si el grado del numerador es menor o igual que el del denominador.
- **Asíntota oblicua** $y = mx + n$: cuando el grado del numerador supera en uno al del denominador. Es el cociente de la división.

Una función racional no puede tener a la vez asíntota horizontal y oblicua.

Ejemplo. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.
Vertical: el denominador se anula en $x = 3$, y allí el numerador vale 7. Hay asíntota vertical $x = 3$.
Horizontal: grados iguales, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{2}{1} = 2$. Hay asíntota horizontal $y = 2$.
Ejemplo de oblicua. $\dfrac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$. Para valores grandes de x la fracción final casi no cuenta, y la gráfica se pega a la recta $y = x + 1$.





CONEXIÓN · LAS ASÍNTOTAS TIENEN SIGNIFICADO

En un problema real, una asíntota horizontal es un techo o un suelo: el valor al que tiende una magnitud a largo plazo, como el coste medio cuando se produce muchísimo o las ventas de un producto cuando el mercado se satura. Dilo siempre con una frase en las unidades del enunciado.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, resultado y conclusión.

RESUELTO 1 · Límites laterales en una función a trozos

Dada $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<2 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$, calcula $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Planteamiento. En $x=2$ cambia la fórmula. A la izquierda manda la primera y a la derecha, la segunda.
Desarrollo. $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+1)=3$. $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-1)=3$.
Conclusión. Los dos laterales coinciden: $\lim_{x\to 2} f(x)=\mathbf{3}$.

RESUELTO 2 · Indeterminación $\frac{0}{0}$

Calcula: a) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

Planteamiento. Al sustituir, los dos dan $\frac{0}{0}$. Se factoriza y se simplifica.
Desarrollo. a) $\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$.
b) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ y $x^2-1=(x-1)(x+1)$. $\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{-1}{2}$.
Conclusión. a) $\mathbf{6}$; b) $\mathbf{-\frac{1}{2}}$. Si sale $\frac{0}{0}$ en $x=a$, los dos polinomios tienen el factor $(x-a)$.

RESUELTO 3 · Un límite infinito

Calcula $\lim_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$.

Planteamiento. Al sustituir sale $\frac{3}{0}$: el límite es infinito. El numerador se acerca a 3, positivo. El signo lo decide el denominador.
Desarrollo. Por la izquierda, con $x=1{,}9$: $x-2=-0{,}1$, negativo. $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=-\infty$.
Por la derecha, con $x=2{,}1$: $x-2=0{,}1$, positivo. $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{x-2}=+\infty$.
Conclusión. Los laterales son $-\infty$ y $+\infty$. El límite no existe, y la recta $x=2$ es una asíntota vertical.

RESUELTO 4 · Límites en el infinito

Calcula: a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x}{x^2+5}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x^2-4}$ c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2+2}$

Desarrollo. a) Grados iguales, 2 y 2: cociente de coeficientes principales, $\dfrac{3}{1}=3$.
b) Grado 1 arriba y 2 abajo: el denominador crece más deprisa. Límite 0.
c) Grado 3 arriba y 2 abajo: el numerador crece más deprisa, y los dos coeficientes principales son positivos. Límite $+\infty$.
Conclusión. a) **3**; b) **0**; c) $+\infty$.

RESUELTO 5 · Continuidad de funciones a trozos

Estudia la continuidad de: a) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\le 1\\ x^2+2 & \text{si } x>1\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

Planteamiento. Cada trozo es un polinomio, continuo en su tramo. Solo queda estudiar el punto de cambio.
Desarrollo. a) En $x=1$: $f(1)=2\cdot 1+1=3$; $\lim_{x\to1^-} f(x)=3$; $\lim_{x\to1^+} f(x)=1+2=3$. Los tres valores coinciden.
b) En $x=0$: $g(0)=0^2=0$; $\lim_{x\to0^-} g(x)=0+1=1$; $\lim_{x\to0^+} g(x)=0$. Los laterales son distintos.
Conclusión. f es **continua en todo** $\mathbb{R}$. g es continua salvo en $x=0$, donde tiene una **discontinuidad de salto finito**, de 1 unidad.

RESUELTO 6 · Continuidad con un parámetro

Halla k para que sea continua $f(x)=\begin{cases}x^2+k & \text{si } x\le 2\\ 3x-1 & \text{si } x>2\end{cases}$

Planteamiento. El único punto dudoso es $x=2$. Para que sea continua, los dos laterales deben coincidir.
Desarrollo. $\lim_{x\to2^-} f(x)=4+k$, que es también $f(2)$. $\lim_{x\to2^+} f(x)=3\cdot 2-1=5$.
$4+k=5\Rightarrow k=1$.
Comprobación. Con $k=1$: por la izquierda $4+1=5$ y por la derecha 5.
Conclusión. La función es continua para $\mathbf{k=1}$. Con cualquier otro valor hay un salto en $x=2$.

RESUELTO 7 · Asíntotas de una función racional

Halla las asíntotas de $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ y estudia cómo se acerca la gráfica a la asíntota vertical.

Desarrollo. *Vertical.* El denominador se anula en $x=3$, donde el numerador vale 7. Con $x=2{,}9$ el denominador es negativo: $\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$. Con $x=3{,}1$ es positivo: $\lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty$.
Horizontal. Grados iguales: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{2}{1}=2$.

Oblicua. No hay, porque ya hay horizontal.
Conclusión. Asíntota vertical $\mathbf{x = 3}$: la gráfica baja hacia $-\infty$ a su izquierda y sube hacia $+\infty$ a su derecha. Asíntota horizontal $\mathbf{y = 2}$. Es la gráfica dibujada en el apartado 1.5.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Dejar $\frac{0}{0}$ como resultado, o decir que vale 0, 1 o «no existe». Hay que factorizar.
- Ante $\frac{k}{0}$, escribir «∞» sin estudiar los dos laterales.
- En el infinito, sustituir y operar con «$\frac{\infty}{\infty}$» sin comparar grados.
- Estudiar la continuidad solo con los laterales, sin calcular $f(a)$.
- Escribir las asíntotas como números. Son rectas: $x = 3$, $y = 2$.
- Confundirlas: la vertical sale del denominador igual a cero; la horizontal, del límite en el infinito.
- No interpretar la asíntota horizontal cuando el problema tiene contexto.

3. Ejercicios propuestos

Soluciones en el apartado 5, con la resolución completa de los ejercicios 13 y 14.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Calcula: a) $\lim_{x\to 2}(x^2+3x)$ b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+5}{x^2+1}$ c) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5}$

2. Calcula: a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x+1}$

3. Calcula: a) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{5x-2}{x+7}$ b) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$ c) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{4x^2-1}{2x^2+3x}$

4. Dada $f(x)=\begin{cases}3-x & \text{si } x<1\\ x+2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$, calcula los límites laterales en $x=1$. ¿Existe el límite?

5. Halla las asíntotas de $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$.

NIVEL 2 · APLICAR

6. Calcula: a) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x}{x^2+x}$

7. Estudia los límites laterales: a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{3}{x-1}$ b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$

8. Estudia la continuidad de: a) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si } x<2\\ 2x-1 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}4-x & \text{si } x\leq 1\\ x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$

9. Halla k para que sea continua $f(x)=\begin{cases}kx+1 & \text{si } x<3\\ x^2-2 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$

10. Halla las asíntotas y los cortes con los ejes de $f(x)=\dfrac{3x-6}{x+2}$ y haz un esbozo de su gráfica.

NIVEL 3 · PENSAR

11. La función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x=1$. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene? ¿Qué valor habría que darle en $x=1$ para que fuera continua?

12. Fabricar x unidades de un producto cuesta $C(x) = 500 + 3x$ euros. Escribe la función de coste medio por unidad, calcula su valor para 100 unidades y halla su límite cuando $x \to +\infty$. ¿Qué significa?

13. Un aparcamiento cobra, según las horas t de estancia, $P(t) = 2t$ euros si $0 < t \leq 3$, $P(t) = 3 + t$ si $3 < t \leq 8$, y $P(t) = 12$ si $t > 8$. Estudia la continuidad de la tarifa e interpreta lo que ocurre en cada punto de cambio.

14. Las ventas mensuales de un nuevo refresco, en miles de botellas, t meses después de su lanzamiento, siguen la función $V(t) = \dfrac{60\,t}{t+3}$. a) Calcula las ventas a los 3 y a los 12 meses. b) Halla las asíntotas e interpreta la horizontal. c) ¿Cuándo se alcanzan las 45.000 botellas mensuales?

15. Halla a y b para que sea continua $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ bx - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · La aplicación de idiomas Lexia

Lexia es una aplicación para aprender vocabulario. Según sus datos, un usuario constante conoce $N(t) = \dfrac{900\,t}{t+6}$ palabras al cabo de t semanas.

a) ¿Cuántas palabras conoce a las 3 semanas? ¿Y a las 12?

b) Calcula $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$ e interpreta el resultado.

c) Halla las asíntotas de la función. ¿Tiene sentido la vertical en este problema?

d) ¿Cuántas semanas hacen falta para conocer 750 palabras?

e) La suscripción cuesta, según los meses m contratados, $S(m) = 9m$ euros si $0 < m \leq 6$ y $S(m) = k + 6m$ euros si $m > 6$. Halla k para que el precio no dé un salto al pasar de 6 meses y calcula entonces el precio de 12 meses.

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. a) $4 + 6 = 10$; b) $\dfrac{4}{2} = 2$; c) $\sqrt{9} = 3$.

2. a) $\lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$; b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x\,(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} x = -1$.

3. a) 5; b) 0; c) $\dfrac{4}{2} = 2$.

4. Por la izquierda, $3 - 1 = 2$. Por la derecha, $1 + 2 = 3$. No coinciden: el límite no existe.

5. Vertical $x = 4$; horizontal $y = 0$.

6. a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{1}{6}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,(x^2-2)}{x\,(x+1)} = \dfrac{-2}{1} = -2$.

7. a) $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha; b) $+\infty$ por los dos lados, porque x^2 es siempre positivo.

8. a) En $x = 2$: $f(2) = 3$, laterales 3 y 3. Continua en $\mathbb{R}$. b) En $x = 1$: $g(1) = 3$, laterales 3 y 2. Salto finito en $x = 1$.

9. $3k + 1 = 9 - 2 \Rightarrow k = 2$.

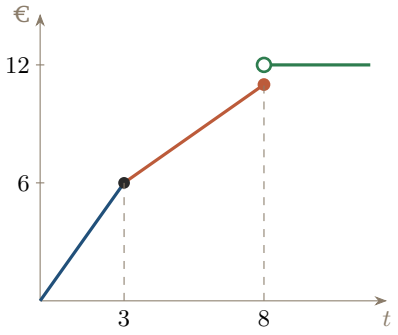
10. Vertical $x = -2$, con $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha. Horizontal $y = 3$. Cortes: $(2, 0)$ y $(0, -3)$.

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$. Hay límite y no hay valor: discontinuidad evitable. Sería continua con $f(1) = 2$.

12. $M(x) = \dfrac{500 + 3x}{x}$. $M(100) = 8$ €. $\lim\limits_{x \to +\infty} M(x) = 3$: al producir muchísimo, el coste fijo se reparte entre tantas unidades que el coste medio se acerca a 3 €, el coste variable de cada unidad.
13. Continua en $t = 3$; salto de 1 € en $t = 8$ (resolución completa a continuación).
14. 30.000 y 48.000 botellas; asíntota horizontal $y = 60$; a los 9 meses (resolución completa a continuación).
15. En $x = 0$: $a = 1$. En $x = 2$: $5 = 2b - 1 \Rightarrow b = 3$.

Resolución completa del ejercicio 13

Planteamiento. Cada tramo es un polinomio, continuo. Hay dos puntos de cambio: $t = 3$ y $t = 8$.
Desarrollo. En $t = 3$: $P(3) = 2 \cdot 3 = 6$; $\lim\limits_{t \to 3^-} P(t) = 6$; $\lim\limits_{t \to 3^+} P(t) = 3 + 3 = 6$. Coinciden.
En $t = 8$: $P(8) = 3 + 8 = 11$; $\lim\limits_{t \to 8^-} P(t) = 11$; $\lim\limits_{t \to 8^+} P(t) = 12$. Los laterales son distintos.
Resultado. Continua en $t = 3$. Discontinuidad de salto finito en $t = 8$, con un salto de 1 €.



Conclusión. Al pasar de 3 horas el precio no cambia de golpe: solo se abarata cada hora adicional, de 2 € a 1 €. Al pasar de 8 horas sí hay un salto: quien está 8 horas justas paga 11 €, y quien se pasa un minuto, **12 €**, la tarifa plana.

Resolución completa del ejercicio 14

a) $V(3) = \dfrac{180}{6} = 30$. $\quad V(12) = \dfrac{720}{15} = 48$. Son 30.000 y 48.000 botellas.
b) *Vertical.* El denominador se anula en $t = -3$, que queda fuera del dominio del problema, porque $t \geq 0$. No interviene. *Horizontal.* Grados iguales: $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = \dfrac{60}{1} = 60$. Asíntota $y = 60$.
c) $\dfrac{60\,t}{t+3} = 45 \Rightarrow 60\,t = 45\,t + 135 \Rightarrow 15\,t = 135 \Rightarrow t = 9$ meses.
Comprobación. $V(9) = \dfrac{540}{12} = 45$.
Resultado. 30.000 y 48.000 botellas; asíntota horizontal $y = 60$; 9 meses.
Conclusión. Las ventas crecen cada vez más despacio y se acercan a **60.000 botellas al mes** sin alcanzarlas. Es el techo del mercado para ese refresco. Las 45.000 botellas se alcanzan **a los 9 meses**.

Ejercicio de síntesis

a) $N(3) = \dfrac{2.700}{9} = 300$ palabras. $\quad N(12) = \dfrac{10.800}{18} = 600$ palabras.
b) Grados iguales: $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = \dfrac{900}{1} = 900$. Por mucho tiempo que pase, el usuario se acerca a 900 palabras sin superarlas: es todo el vocabulario que enseña la aplicación.
c) Horizontal: $y = 900$. Vertical: el denominador se anula en $t = -6$. Como el tiempo no puede ser negativo, esa asíntota queda fuera del dominio del problema y no tiene sentido aquí.
d) $\dfrac{900\,t}{t+6} = 750 \Rightarrow 900\,t = 750\,t + 4.500 \Rightarrow 150\,t = 4.500 \Rightarrow t = 30$ semanas.
e) En $m = 6$: $S(6) = 9 \cdot 6 = 54$, que es también el límite por la izquierda. Por la derecha:

$k + 36$. Continuidad: $k + 36 = 54 \Rightarrow k = 18$. Precio de 12 meses: $S(12) = 18 + 72 = 90$ **€**. **Conclusión.** Las primeras 300 palabras llegan en 3 semanas, y para pasar de 600 a 750 hacen falta 18 semanas más: el aprendizaje se frena al acercarse al techo de **900 palabras**. Con $\mathbf{k = 18}$ la tarifa es continua, y un año cuesta **90 €**.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Explicar qué es un límite con una tabla de valores.
- ☐ Calcular límites laterales y decidir si existe el límite.
- ☐ Resolver una indeterminación $\frac{0}{0}$ factorizando.
- ☐ Estudiar un límite $\frac{k}{0}$ con el signo del denominador a cada lado.
- ☐ Calcular el límite en el infinito de un cociente de polinomios comparando grados.
- ☐ Estudiar la continuidad de una función a trozos con $f(a)$ y los dos laterales.
- ☐ Clasificar una discontinuidad: evitable, de salto finito o de salto infinito.
- ☐ Hallar el parámetro que hace continua una función.
- ☐ Hallar las asíntotas de una función racional e interpretarlas en su contexto.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 11 · TODO EN MEDIA CARA

Límite en un punto	sustituir · existe si los dos laterales coinciden
$\frac{0}{0}$	factorizar, simplificar y volver a sustituir
$\frac{k}{0}$, $k \neq 0$	límite infinito · laterales con el signo del denominador
En el infinito	grado menor arriba: 0 · grados iguales: cociente de coeficientes principales · grado mayor arriba: $\pm\infty$
Continua en a	existe $f(a)$ · existe el límite · $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
Discontinuidades	evitable: hay límite, falla $f(a)$ · salto finito: laterales distintos · salto infinito: algún lateral infinito
Asíntotas	vertical $x = a$: denominador 0, límite infinito · horizontal $y = L$: límite en $\pm\infty$ · oblicua: cociente de la división, si el grado de arriba supera en uno al de abajo

Las asíntotas se escriben como rectas · en una función a trozos solo se estudian los puntos de cambio.