BLOQUE III · ANÁLISIS

Unidad 10

Exponenciales, logarítmicas e interpolación

La función exponencial · crecimiento y decrecimiento exponencial · la función logarítmica · interpolación lineal · extrapolación · interpolación cuadrática · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. Una población que crece un 2 % cada año, un coche que pierde un 15 % de su valor cada año y un capital a interés compuesto siguen la misma ley: en cada periodo se multiplican por un número fijo. Esa ley es la función exponencial. La segunda mitad de la unidad resuelve otro problema muy frecuente con datos reales: se conocen unos pocos valores de una tabla y hace falta estimar uno que no está.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Función exponencial	representar a^x y decir si crece o decrece
2. Modelos exponenciales	escribir la función de una población o de una depreciación y hallar cuándo alcanza un valor
3. Función logarítmica	calcular valores, hallar el dominio y representarla
4. Interpolación lineal	estimar un valor intermedio a partir de dos datos
5. Extrapolación	estimar un valor fuera de los datos y valorar su fiabilidad
6. Interpolación cuadrática	hallar la parábola que pasa por tres datos y estimar con ella

1. Teoría

1.1 · La función exponencial

PARA MEMORIZAR

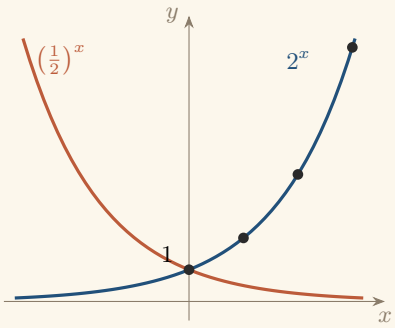
Función exponencial de base a: $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$. La incógnita está en el exponente.

- Dominio: $\mathbb{R}$. Recorrido: $(0,\ +\infty)$. Siempre es positiva.
- Pasa por $(0,\ 1)$ y por $(1,\ a)$.
- Si $a > 1$, es **creciente**. Si $0 < a < 1$, es **decreciente**.
- Se acerca al eje X sin llegar a tocarlo.

Ejemplo. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Cada vez que x aumenta una unidad, 2^x se multiplica por 2 y $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ se divide entre 2. Las dos gráficas son simétricas respecto al eje Y.



1.2 · Crecimiento y decrecimiento exponencial

PARA MEMORIZAR

Una cantidad que parte de C_0 y **se multiplica por** a **en cada periodo** vale, al cabo de t periodos,

$$f(t) = C_0 \cdot a^t$$

Si aumenta un $p\,\%$ por periodo, $a = 1 + \frac{p}{100}$. Si disminuye un $p\,\%$, $a = 1 - \frac{p}{100}$. El número a es el índice de variación de la unidad 7.

Ejemplo. Una ciudad de 80.000 habitantes crece un 3 % anual: $P(t) = 80.000 \cdot 1{,}03^t$. Dentro de 5 años tendrá $80.000 \cdot 1{,}03^5 = 92.741{,}93$, unos 92.742 habitantes. Una máquina de 10.000 € que pierde un 20 % de su valor cada año vale $V(t) = 10.000 \cdot 0{,}8^t$: a los 2 años, 6.400 €.



CONEXIÓN · EL INTERÉS COMPUESTO ERA ESTO

La fórmula $C_f = C_0\,(1 + r)^t$ de la unidad 7 es una función exponencial de base $1 + r$. Y para averiguar *cuándo* se alcanza un valor hay que despejar el exponente, con logaritmos, como en la unidad 2: $a^t = k \Rightarrow t = \dfrac{\log k}{\log a}$.



AVISO · LINEAL NO ES LO MISMO QUE EXPONENCIAL

Crecer «100 cada año» es **sumar** siempre lo mismo: función lineal. Crecer «un 10 % cada año» es **multiplicar** siempre por lo mismo: función exponencial. Al principio se parecen, pero a la larga la exponencial deja atrás a cualquier recta.

1.3 · La función logarítmica

PARA MEMORIZAR

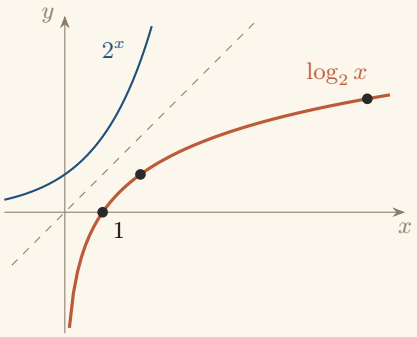
Función logarítmica de base a: $f(x) = \log_a x$. Es la inversa de la exponencial: $y = \log_a x \iff a^y = x$.

- Dominio: $(0,\ +\infty)$. Solo existe el logaritmo de números positivos. Recorrido: $\mathbb{R}$.
- Pasa por $(1,\ 0)$ y por $(a,\ 1)$.
- Si $a > 1$, es creciente, pero cada vez más despacio.
- Se acerca al eje Y sin llegar a tocarlo.

Ejemplo. $f(x) = \log_2 x$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	8
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	3

Es la tabla de 2^x con las filas intercambiadas. Por eso su gráfica es la de 2^x reflejada en la recta $y = x$.
Para el dominio de $\log(x-3)$ se exige $x - 3 > 0$: dominio $(3,\ +\infty)$.



1.4 · Interpolación lineal

De muchos fenómenos solo se conocen unos pocos datos: la población en los años de censo, el precio en dos fechas. **Interpolar** es estimar un valor **intermedio** a partir de los que se conocen.

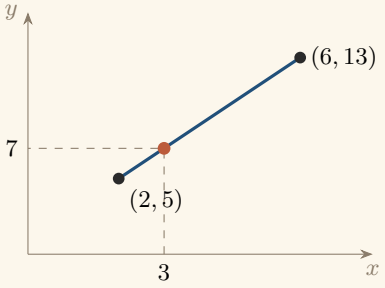
PARA MEMORIZAR

Interpolación lineal. Se supone que, entre dos datos $(x_0,\ y_0)$ y $(x_1,\ y_1)$, la magnitud cambia a ritmo constante. Es decir, se sustituye la función desconocida por la **recta** que une los dos puntos:

$$y = y_0 + m\,(x - x_0) \qquad \text{con} \qquad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

m es la variación por unidad: lo que cambia y cuando x aumenta 1.

Ejemplo. Se sabe que $f(2) = 5$ y $f(6) = 13$. Estimar $f(3)$.
Variación por unidad: $m = \dfrac{13-5}{6-2} = 2$.
De $x = 2$ a $x = 3$ se avanza una unidad: $f(3) \approx 5 + 2 \cdot 1 = 7$.



Extrapolar es usar la misma recta **fuera** del intervalo de los datos. Es menos fiable: nada garantiza que el ritmo se mantenga, y el error crece cuanto más lejos se va.

1.5 · Interpolación cuadrática

PARA MEMORIZAR

Interpolación cuadrática. Con tres datos que no están alineados se usa una parábola. Se busca la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica pasa por los tres puntos. Al sustituir cada punto se obtiene una ecuación, y las tres forman un sistema lineal con incógnitas a, b y c.

Ejemplo. Parábola que pasa por $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 5)$.

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Longrightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = 1$$

La función es $f(x) = x^2 + 1$. Estimación para $x = 1{,}5$: $f(1{,}5) = 2{,}25 + 1 = 3{,}25$. Un dato con $x = 0$ da directamente c: conviene contar el tiempo desde el primer dato.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, resultado y conclusión.

RESUELTO 1 · Reconocer y representar

Di si son crecientes o decrecientes y calcula su valor en $x=-1$, $x=0$ y $x=2$: a) $f(x)=3^x$ b) $g(x)=0{,}5^x$

Desarrollo. a) Base $3>1$: creciente. $f(-1)=\frac{1}{3}$; $f(0)=1$; $f(2)=9$.
b) Base $0{,}5$, entre 0 y 1: decreciente. $g(-1)=0{,}5^{-1}=2$; $g(0)=1$; $g(2)=0{,}25$.
Conclusión. Las dos pasan por $(0,1)$ y son siempre positivas. La primera sube cada vez más deprisa hacia la derecha. La segunda baja acercándose al eje X.

RESUELTO 2 · Una población que crece

El municipio de Robledal tiene 5.000 habitantes y crece un 4 % cada año. a) Escribe la función que da la población dentro de t años. b) ¿Cuántos habitantes tendrá dentro de 3 años? c) ¿Cuándo llegará a 8.000?

Planteamiento. Crecer un 4 % es multiplicar por $1{,}04$ cada año: modelo exponencial.
Desarrollo. a) $P(t)=5.000\cdot 1{,}04^t$.
b) $P(3)=5.000\cdot 1{,}04^3=5.000\cdot 1{,}124864=5.624{,}32$.
c) $5.000\cdot 1{,}04^t=8.000\Rightarrow 1{,}04^t=1{,}6\Rightarrow t=\dfrac{\log 1{,}6}{\log 1{,}04}=11{,}98$ años.
Conclusión. Dentro de 3 años tendrá unos **5.624 habitantes**, y llegará a 8.000 dentro de **unos 12 años**.

RESUELTO 3 · Un coche que pierde valor

Un coche cuesta 24.000 € y cada año pierde un 15 % de su valor. a) ¿Cuánto valdrá a los 4 años? b) ¿A partir de qué año valdrá menos de la mitad?

Planteamiento. Perder un 15 % es multiplicar por $0{,}85$: $V(t)=24.000\cdot 0{,}85^t$.
Desarrollo. a) $V(4)=24.000\cdot 0{,}85^4=24.000\cdot 0{,}522006=12.528{,}15$ €.
b) $24.000\cdot 0{,}85^t=12.000\Rightarrow 0{,}85^t=0{,}5\Rightarrow t=\dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}85}=4{,}27$ años.
Comprobación. A los 4 años vale 12.528,15 €, algo más de la mitad. A los 5, $24.000\cdot 0{,}85^5=10.648{,}93$ €, ya por debajo.
Conclusión. A los 4 años vale **12.528,15 €**. Baja de la mitad durante el quinto año: **al cumplir 5 años** ya vale menos de 12.000 €.

RESUELTO 4 · Función logarítmica

a) Calcula $\log_2 8$, $\log_2 1$ y $\log_2 \frac{1}{2}$. b) Halla el dominio de $f(x)=\log(2x-6)$. c) Resuelve $\log_2 x=5$.

Desarrollo. a) $\log_2 8 = 3$, porque $2^3 = 8$. $\log_2 1 = 0$, porque $2^0 = 1$. $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, porque $2^{-1} = \frac{1}{2}$.
b) Hace falta $2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$. La desigualdad es estricta: no existe el logaritmo de 0.
c) Por la definición, $\log_2 x = 5 \iff x = 2^5 = 32$.
Conclusión. 3, 0 y -1; dominio $(\mathbf{3}, +\infty)$; $\mathbf{x = 32}$.

RESUELTO 5 · Interpolación lineal

Según el censo, el municipio de Almenara tenía 12.400 habitantes en 2010 y 15.000 en 2020. Estima por interpolación lineal la población de 2016.

Planteamiento. Dos datos: $(2010,\ 12.400)$ y $(2020,\ 15.000)$. Se supone un crecimiento constante entre ellos.
Desarrollo. Variación por año: $m = \dfrac{15.000 - 12.400}{2020 - 2010} = \dfrac{2.600}{10} = 260$ habitantes al año.
De 2010 a 2016 pasan 6 años: $12.400 + 260 \cdot 6 = 12.400 + 1.560 = 13.960$.
Comprobación. Desde el otro extremo: $15.000 - 260 \cdot 4 = 13.960$.
Conclusión. En 2016 había, aproximadamente, **13.960 habitantes**.

RESUELTO 6 · Extrapolar, con cuidado

Con los datos del ejercicio anterior, estima la población de 2025. ¿Qué fiabilidad tiene esa estimación?

Desarrollo. De 2010 a 2025 pasan 15 años: $12.400 + 260 \cdot 15 = 16.300$ habitantes.
Conclusión. La estimación es de **16.300 habitantes**, pero 2025 queda fuera del intervalo de los datos. Es una extrapolación, y supone que el municipio ha seguido ganando 260 habitantes al año después de 2020. Si el ritmo cambió, el valor real puede alejarse bastante. La estimación de 2016 era más fiable, porque tenía un dato a cada lado.

RESUELTO 7 · Interpolación cuadrática

El beneficio de una empresa, en miles de euros, fue de 6 en su primer año, 11 en el segundo y 27 en el cuarto. Estima el beneficio del tercer año con una interpolación cuadrática.

Planteamiento. Se busca $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pase por $(1, 6)$, $(2, 11)$ y $(4, 27)$.
Desarrollo.

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 11 \\ 16a + 4b + c = 27 \end{cases}$$

Restando la primera a la segunda: $3a + b = 5$. Restando la segunda a la tercera: $12a + 2b = 16$, es decir, $6a + b = 8$. Restando estas dos: $3a = 3 \Rightarrow a = 1$. Entonces $b = 2$ y $c = 6 - 1 - 2 = 3$.
$f(x) = x^2 + 2x + 3$. $\quad f(3) = 9 + 6 + 3 = 18$.
Comprobación. $f(4) = 16 + 8 + 3 = 27$.
Conclusión. El beneficio estimado del tercer año es de **18.000 €**. Con interpolación lineal entre el segundo y el cuarto año habrían salido 19.000 €. La parábola tiene en cuenta que el beneficio se acelera.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Escribir un descenso del 15 % con base $0{,}15$ o $1{,}15$. La base es $0{,}85$.
- Tratar un crecimiento porcentual como lineal: sumar el mismo número cada año.
- Despejar el exponente dividiendo: de $1{,}04^{t} = 1{,}6$ no sale $t = 1{,}6 : 1{,}04$. Hacen falta logaritmos.
- En el dominio de un logaritmo, poner $\geq$ en lugar de $>$.
- En la interpolación, calcular la pendiente al revés: variación de x entre variación de y.
- Multiplicar la pendiente por x entero. Se multiplica por lo que se avanza desde x_0.
- Dar una extrapolación sin advertir que es menos fiable.

3. Ejercicios propuestos

Soluciones en el apartado 5, con la resolución completa de los ejercicios 13 y 14.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Haz una tabla de valores de $f(x) = 3^x$ para $x = -1,\ 0,\ 1,\ 2$ y represéntala.

2. Di si son crecientes o decrecientes: a) $1{,}5^x$ b) $0{,}8^x$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

3. Calcula: a) $\log_3 81$ b) $\log_2 \frac{1}{8}$ c) $\log 1.000$

4. Halla el dominio de: a) $f(x) = \log(x + 2)$ b) $g(x) = \log(5 - x)$

5. Se sabe que $f(2) = 10$ y $f(6) = 22$. Estima $f(5)$ por interpolación lineal.

NIVEL 2 · APLICAR

6. Una ciudad de 20.000 habitantes crece un 2 % anual. ¿Cuántos tendrá dentro de 5 años? ¿Cuándo superará los 25.000?

7. Una máquina de 50.000 € pierde un 20 % de su valor cada año. ¿Cuánto vale a los 3 años? ¿A partir de qué año valdrá menos de 10.000 €?

8. Resuelve: a) $2^x = 20$ b) $3 \cdot 1{,}5^x = 24$

9. A las 8:00 la temperatura era de 12 °C y a las 12:00, de 20 °C. Estima por interpolación lineal la temperatura a las 11:00. ¿A qué hora se alcanzaron los 15 °C?

10. Una imprenta cobra 4,50 € por unidad en pedidos de 100 unidades y 3,60 € por unidad en pedidos de 250. Estima por interpolación lineal el precio por unidad de un pedido de 150.

NIVEL 3 · PENSAR

11. Halla la función cuadrática que pasa por $(0, 2)$, $(1, 3)$ y $(3, 11)$ y estima con ella el valor en $x = 2$.

12. Un cultivo de bacterias tiene 500 individuos y se duplica cada 3 horas. Escribe la función que da el número de bacterias a las t horas. ¿Cuántas habrá a las 12 horas? ¿Cuándo habrá 100.000?

13. Lidia recibe dos ofertas de trabajo. La empresa A paga 24.000 € el primer año y sube el sueldo 1.200 € cada año. La empresa B paga 22.000 € el primer año y sube el sueldo un 5 % cada año. a) Escribe el sueldo en cada empresa pasados t años. b) Compáralos a los 5 y a los 10 años. c) ¿Desde qué año cobra más en B?

14. Las ventas de una librería, en miles de euros, fueron 20 en su primer año, 44 en el tercero y 60 en el quinto. a) Estima las del segundo año por interpolación lineal. b) Halla la función cuadrática que pasa por los tres datos y estima con ella el segundo y el cuarto año. c) Compara.

15. Halla la función exponencial $f(x) = k \cdot a^x$ que pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(2, 12)$ y calcula $f(5)$.

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · La tienda en línea Verdemar

Verdemar vende productos de huerta por internet. Empezó con 800 clientes y su número crece un 10 % cada mes.

a) Escribe la función que da el número de clientes a los t meses y calcula cuántos tendrá a los 6 meses.

b) ¿En qué mes superará los 2.000 clientes?

c) Sus ingresos, en miles de euros, fueron 5 en el mes 2 y 9,8 en el mes 6. Estima los ingresos del mes 5 por interpolación lineal.

d) Con esos mismos dos datos, estima los ingresos del mes 12. ¿Qué fiabilidad tiene esa estimación?

e) Se conoce un tercer dato: en el mes 10 los ingresos fueron de 13. Halla la función cuadrática que pasa por los tres datos, vuelve a estimar los meses 5 y 12 y compara con los apartados anteriores.

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9. Creciente, pasa por $(0, 1)$ y se acerca al eje X por la izquierda.
2. a) creciente; b) decreciente; c) decreciente.
3. a) 4; b) -3; c) 3.
4. a) $x + 2 > 0$: $(-2,\ +\infty)$; b) $5 - x > 0$: $(-\infty,\ 5)$.
5. $m = \dfrac{22 - 10}{6 - 2} = 3$; $f(5) \approx 10 + 3 \cdot 3 = 19$.
6. $P(5) = 20.000 \cdot 1{,}02^5 = 22.081{,}62$, unos 22.082 habitantes. $1{,}02^{\,t} = 1{,}25 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}25}{\log 1{,}02} = 11{,}27$: los supera durante el año 12.
7. $V(3) = 50.000 \cdot 0{,}8^3 = 25.600\,€$. $0{,}8^{\,t} = 0{,}2 \Rightarrow t = \dfrac{\log 0{,}2}{\log 0{,}8} = 7{,}21$: al cumplir 8 años ya vale menos.
8. a) $x = \dfrac{\log 20}{\log 2} = 4{,}32$; b) $1{,}5^x = 8 \Rightarrow x = \dfrac{\log 8}{\log 1{,}5} = 5{,}13$.
9. $m = \dfrac{20 - 12}{4} = 2\,°\text{C}$ por hora. A las 11:00: $12 + 2 \cdot 3 = 18\,°\text{C}$. $12 + 2h = 15 \Rightarrow h = 1{,}5$ horas: a las 9:30.
10. $m = \dfrac{3{,}60 - 4{,}50}{250 - 100} = -0{,}006\,€$ por unidad. $4{,}50 - 0{,}006 \cdot 50 = 4{,}20\,€$.
11. $c = 2$; $a + b = 1$; $9a + 3b = 9$. Solución: $a = 1$, $b = 0$. $f(x) = x^2 + 2$; $f(2) = 6$.
12. $N(t) = 500 \cdot 2^{\,t/3}$. $N(12) = 500 \cdot 2^4 = 8.000$. $2^{\,t/3} = 200 \Rightarrow t = 3 \cdot \dfrac{\log 200}{\log 2} = 22{,}93$ horas.
13. A los 5 años gana más en A; a los 10, todavía en A por poco; desde el año 11, en B (resolución completa a continuación).
14. Lineal: 32. Cuadrática: $f(x) = -x^2 + 16x + 5$, con $f(2) = 33$ y $f(4) = 53$ (resolución completa a continuación).
15. $f(0) = k = 3$. $3a^2 = 12 \Rightarrow a = 2$. $f(x) = 3 \cdot 2^x$; $f(5) = 96$.

Resolución completa del ejercicio 13

a) Planteamiento. En A se suma una cantidad fija cada año: función lineal, $A(t) = 24.000 + 1.200\,t$. En B se multiplica por $1{,}05$ cada año: función exponencial, $B(t) = 22.000 \cdot 1{,}05^{\,t}$.
b) y c) Desarrollo.

t	Empresa A	Empresa B	
0	24.000 €	22.000,00 €	gana más en A
5	30.000 €	28.078,19 €	gana más en A
10	36.000 €	35.835,68 €	gana más en A, por 164 €
11	37.200 €	37.627,47 €	gana más en B
12	38.400 €	39.508,84 €	gana más en B

La ecuación $24.000 + 1.200\,t = 22.000 \cdot 1{,}05^{\,t}$ mezcla una recta con una exponencial y no se puede despejar. Se resuelve probando valores, como en la tabla.
Resultado. El sueldo de B supera al de A cuando han pasado 11 años.
Conclusión. Durante los diez primeros años cobra más en la empresa A. **A partir del undécimo**, la subida porcentual de B gana, y la diferencia crece cada año. Si piensa quedarse poco tiempo, le conviene A. Para una carrera larga, B.

Resolución completa del ejercicio 14

a) Entre $(1, 20)$ y $(3, 44)$: $m = \dfrac{44 - 20}{3 - 1} = 12$. Segundo año: $20 + 12 \cdot 1 = 32$.
b) $f(x) = ax^2 + bx + c$ por $(1, 20)$, $(3, 44)$ y $(5, 60)$:

$$\begin{cases} a + b + c = 20 \\ 9a + 3b + c = 44 \\ 25a + 5b + c = 60 \end{cases}$$

Segunda menos primera: $8a + 2b = 24 \Rightarrow 4a + b = 12$. Tercera menos segunda: $16a + 2b = 16 \Rightarrow 8a + b = 8$. Restando: $4a = -4 \Rightarrow a = -1$; $b = 16$; $c = 20 + 1 - 16 = 5$.
$f(x) = -x^2 + 16x + 5$. $\quad f(2) = -4 + 32 + 5 = 33$. $\quad f(4) = -16 + 64 + 5 = 53$.
Comprobación. $f(5) = -25 + 80 + 5 = 60$.
c) Resultado. Segundo año: 32 con la recta y 33 con la parábola. Cuarto año: la recta entre el tercero y el quinto da $44 + 8 = 52$, y la parábola, 53.
Conclusión. Las ventas crecen cada vez más despacio: 24 en los dos primeros años y 16 en los dos siguientes. La parábola recoge ese frenazo y da valores algo mayores que las rectas, **33.000 € y 53.000 €**. Las diferencias son pequeñas porque se interpola entre datos cercanos.

Ejercicio de síntesis

a) $C(t) = 800 \cdot 1{,}1^{\,t}$. $C(6) = 800 \cdot 1{,}771561 = 1.417{,}25$: unos 1.417 clientes.
b) $800 \cdot 1{,}1^{\,t} = 2.000 \Rightarrow 1{,}1^{\,t} = 2{,}5 \Rightarrow t = \dfrac{\log 2{,}5}{\log 1{,}1} = 9{,}61$. En el mes 9 tiene 1.886 clientes y en el mes 10, 2.075: los supera **en el mes 10**.
c) $m = \dfrac{9{,}8 - 5}{6 - 2} = 1{,}2$ miles de euros al mes. Mes 5: $5 + 1{,}2 \cdot 3 = 8{,}6$, es decir, 8.600 €.
d) Mes 12: $5 + 1{,}2 \cdot 10 = 17$, es decir, 17.000 €. Es una extrapolación, seis meses más allá del último dato. Solo vale si los ingresos siguen subiendo 1.200 € al mes.

e) $f(x) = ax^2 + bx + c$ por $(2,\ 5)$, $(6,\ 9{,}8)$ y $(10,\ 13)$:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 5 \\ 36a + 6b + c = 9{,}8 \\ 100a + 10b + c = 13 \end{cases}$$

Segunda menos primera: $32a + 4b = 4{,}8 \Rightarrow 8a + b = 1{,}2$. Tercera menos segunda: $64a + 4b = 3{,}2 \Rightarrow 16a + b = 0{,}8$. Restando: $8a = -0{,}4 \Rightarrow a = -0{,}05$; $b = 1{,}6$; $c = 5 + 0{,}2 - 3{,}2 = 2$. $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}6x + 2$. $f(5) = -1{,}25 + 8 + 2 = 8{,}75$. $f(12) = -7{,}2 + 19{,}2 + 2 = 14$. **Conclusión.** En el mes 5 las dos estimaciones casi coinciden: 8.600 € y 8.750 €. En el mes 12 se separan mucho: 17.000 € con la recta y **14.000 €** con la parábola. El tercer dato muestra que los ingresos se están frenando, y la extrapolación lineal no podía saberlo. Interpolar es seguro; extrapolar depende de que nada cambie.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Decir si una función exponencial crece o decrece mirando su base.
- ☐ Escribir la función de un crecimiento o un descenso porcentual.
- ☐ Hallar cuándo un modelo exponencial alcanza un valor, con logaritmos.
- ☐ Distinguir un crecimiento lineal de uno exponencial.
- ☐ Calcular logaritmos sencillos y hallar el dominio de una función logarítmica.
- ☐ Estimar un valor intermedio por interpolación lineal y comprobarlo desde el otro extremo.
- ☐ Hallar para qué valor de x se alcanza una cantidad dada.
- ☐ Explicar por qué una extrapolación es menos fiable.
- ☐ Hallar la parábola que pasa por tres puntos y estimar con ella.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 10 · TODO EN MEDIA CARA

Exponencial	$f(x) = a^x$ · dominio $\mathbb{R}$, recorrido $(0, +\infty)$ · pasa por $(0, 1)$ · $a > 1$ crece, $0 < a < 1$ decrece
Modelo exponencial	$f(t) = C_0 \cdot a^t$ · sube un $p\,\%$: $a = 1 + \dfrac{p}{100}$ · baja un $p\,\%$: $a = 1 - \dfrac{p}{100}$
Despejar el tiempo	$a^t = k \Rightarrow t = \dfrac{\log k}{\log a}$
Logarítmica	$y = \log_a x \iff a^y = x$ · dominio $(0, +\infty)$ · pasa por $(1, 0)$
Interpolación lineal	$m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ · $y = y_0 + m\,(x - x_0)$
Extrapolación	la misma recta, fuera de los datos: menos fiable cuanto más lejos
Interpolación cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$ · una ecuación por punto · sistema con incógnitas a, b, c

Sumar siempre lo mismo es lineal; multiplicar siempre por lo mismo es exponencial · una estimación se da con la palabra «aproximadamente».