BLOQUE III · ANÁLISIS

Unidad 9

Funciones elementales

Función, dominio y recorrido · funciones lineales · funciones cuadráticas · proporcionalidad inversa · funciones a trozos y valor absoluto · leer una gráfica · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. El coste de producir, el beneficio de una empresa, la factura de la luz y el precio de un billete según la antelación son cantidades que dependen de otra. Una función es la manera de escribir esa dependencia, y su gráfica, la manera de verla de un vistazo. Con cuatro tipos de función se describen casi todas las situaciones económicas de este curso, y todo el bloque de análisis, hasta las derivadas, se apoya en ellas.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Dominio y recorrido	hallar el dominio de una función con denominador o con raíz
2. Funciones lineales	escribir la función de un coste con parte fija y parte variable, y comparar dos tarifas
3. Funciones cuadráticas	hallar vértice y cortes, dibujar la parábola y encontrar un máximo
4. Proporcionalidad inversa	reconocerla en un enunciado y representarla
5. Funciones a trozos	evaluar, representar y resolver $f(x) = k$ en una función definida por tramos
6. Leer una gráfica	decir dónde crece, dónde decrece y dónde alcanza sus máximos y mínimos

1. Teoría

1.1 · Función, dominio y recorrido

PARA MEMORIZAR

Función: regla que asigna a cada valor de x **un único** valor de y. Se escribe $y = f(x)$. **Dominio**: conjunto de valores de x para los que la función se puede calcular. **Recorrido**: conjunto de valores que toma y.

Dominio según el tipo de fórmula

- **Polinomio**: todos los números reales, $\mathbb{R}$.
- **Cociente**: $\mathbb{R}$ menos los valores que anulan el denominador.
- **Raíz cuadrada**: los valores que hacen el radicando mayor o igual que cero.

Ejemplos. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$: el denominador se anula en $x = 2$. Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$.
$g(x) = \sqrt{x-1}$: hace falta $x - 1 \geq 0$, es decir, $x \geq 1$. Dominio: $[1,\ +\infty)$.

En un problema real el dominio lo recorta también el contexto. Si x es un número de unidades fabricadas, no puede ser negativo, y si la fábrica produce como máximo 500, el dominio es $[0,\ 500]$.

1.2 · Funciones lineales

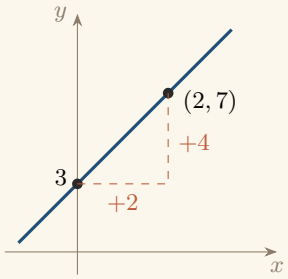
PARA MEMORIZAR

Función lineal: $f(x) = mx + n$. Su gráfica es una **recta**. m es la **pendiente**: lo que cambia y cuando x aumenta una unidad. n es la **ordenada en el origen**: el valor de y cuando $x = 0$.

Pendiente de la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) : $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si $m > 0$, la función crece. Si $m < 0$, decrece. Si $m = 0$, es constante.

Ejemplo. Recta que pasa por $(0, 3)$ y $(2, 7)$.
Pendiente: $m = \dfrac{7-3}{2-0} = 2$. Ordenada en el origen: $n = 3$, porque el punto $(0, 3)$ está en el eje vertical. Función: $f(x) = 2x + 3$.



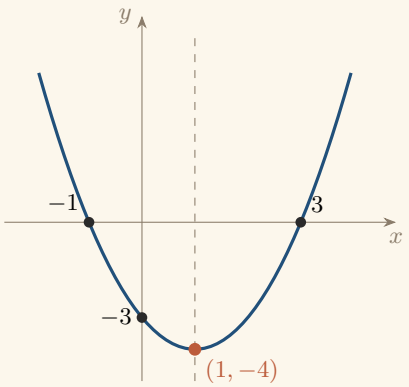
1.3 · Funciones cuadráticas

PARA MEMORIZAR

Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Su gráfica es una **parábola**.

- Si $a > 0$, se abre hacia arriba y el vértice es un **mínimo**. Si $a < 0$, se abre hacia abajo y el vértice es un **máximo**.
- **Vértice**: $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, $\quad y_v = f(x_v)$.
- **Cortes con el eje** X: soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$. Puede haber dos, uno o ninguno.
- **Corte con el eje** Y: el punto $(0,\ c)$.

Ejemplo. $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Como $a = 1 > 0$, se abre hacia arriba.
Vértice: $x_v = \dfrac{2}{2} = 1$; $\quad y_v = 1 - 2 - 3 = -4$. Punto $(1, -4)$.
Cortes con X: $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, es decir, $x = -1$ y $x = 3$.
Corte con Y: $(0, -3)$.
El vértice queda justo en medio de los dos cortes: $\dfrac{-1+3}{2} = 1$. La parábola es simétrica respecto a la recta vertical $x = 1$.





TRUCO · CINCO PUNTOS PARA DIBUJAR UNA PARÁBOLA

El vértice, los dos cortes con el eje X, el corte con el eje Y y el simétrico de este último respecto al eje de la parábola. En el ejemplo, el simétrico de $(0, -3)$ es $(2, -3)$. Con esos cinco puntos el dibujo sale bien a mano.

1.4 · Proporcionalidad inversa

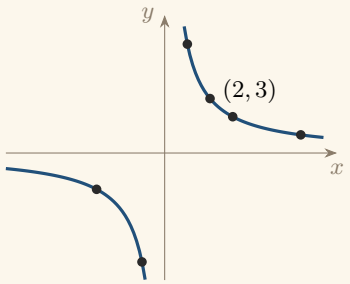
PARA MEMORIZAR

Función de proporcionalidad inversa: $f(x) = \dfrac{k}{x}$. El producto $x \cdot y$ vale siempre k: si una magnitud se duplica, la otra se reduce a la mitad. Su gráfica es una **hipérbola**. Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$. La curva se acerca a los dos ejes sin llegar a tocarlos.

Ejemplo. $f(x) = \dfrac{6}{x}$.

x	-3	-1	1	2	3	6
y	-2	-6	6	3	2	1

En problemas reales x es positivo y solo se dibuja la rama del primer cuadrante.



1.5 · Funciones a trozos y valor absoluto

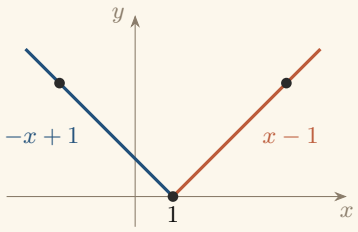
PARA MEMORIZAR

Función a trozos: función con una fórmula distinta en cada tramo del dominio. Para calcular $f(x)$ se mira primero **en qué tramo cae** x, y se usa solo la fórmula de ese tramo. Para representarla se dibuja cada fórmula únicamente dentro de su tramo.

Ejemplo. El valor absoluto es una función a trozos:

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1) = -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En $x = -2$ se usa el primer tramo: $-(-2)+1 = 3$. En $x = 4$, el segundo: $4-1 = 3$. La gráfica tiene forma de V, con el vértice donde se anula lo de dentro, en $(1, 0)$.





AVISO · EL PUNTO DE CAMBIO SE MIRA DOS VECES

En el valor de x donde cambia la fórmula hay que fijarse en cuál de los dos tramos lleva el signo igual. Ese es el que da el valor de la función. En el dibujo, el extremo que pertenece al tramo se marca con un punto relleno y el que no pertenece, con un punto hueco. Si las dos fórmulas dan lo mismo en ese punto, los trozos se unen y la gráfica no se rompe.

1.6 · Leer una gráfica

PARA MEMORIZAR

Una función es **creciente** en un intervalo si, al avanzar hacia la derecha, la gráfica sube, y **decreciente** si baja. Tiene un **máximo** donde pasa de crecer a decrecer y un **mínimo** donde pasa de decrecer a crecer. Los intervalos se dan con valores de x. **Ejemplo:** la parábola $f(x) = x^2 - 2x - 3$ del apartado 1.3 decrece en $(-\infty,\ 1)$, crece en $(1,\ +\infty)$ y tiene un mínimo en $(1, -4)$. Su recorrido es $[-4,\ +\infty)$.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, resultado y conclusión.

RESUELTO 1 · Dominios

Halla el dominio de: a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ b) $g(x)=\sqrt{2x-6}$ c) $h(x)=x^3-2x$

Desarrollo. a) Es un cociente. El denominador se anula si $x^2-4=0$, es decir, en $x=-2$ y $x=2$.
b) Es una raíz cuadrada. Hace falta $2x-6\geq 0\Rightarrow x\geq 3$.
c) Es un polinomio. Se puede calcular para cualquier número.
Conclusión. Dom $f=\mathbb{R}-\{-2,\ 2\}$; Dom $g=[3,\ +\infty)$; Dom $h=\mathbb{R}$.

RESUELTO 2 · Un coste lineal

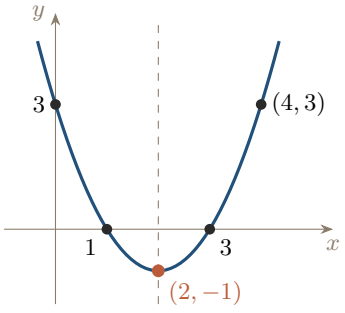
La imprenta Tipos cobra por un pedido de carteles 40 € fijos por preparar la máquina más 0,15 € por cada copia. a) Escribe la función que da el coste de x copias. b) ¿Cuánto cuestan 500 copias? c) ¿Cuántas copias se pueden encargar con 100 €?

Planteamiento. Parte fija más parte proporcional al número de copias: una función lineal.
Desarrollo. a) $C(x)=40+0{,}15x$. La ordenada en el origen es el coste fijo y la pendiente, el precio de cada copia.
b) $C(500)=40+0{,}15\cdot 500=40+75=115$ €.
c) $40+0{,}15x=100\Rightarrow 0{,}15x=60\Rightarrow x=400$ copias.
Conclusión. 500 copias cuestan **115 €**, y con 100 € se pueden encargar **400 copias**.

RESUELTO 3 · Representar una parábola

Representa $f(x)=x^2-4x+3$ indicando el vértice y los cortes con los ejes.

Planteamiento. $a=1>0$: se abre hacia arriba y el vértice es un mínimo.
Desarrollo. Vértice: $x_v=\dfrac{4}{2}=2$; $y_v=4-8+3=-1$.
Cortes con X: $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{4\pm 2}{2}$, es decir, $x=1$ y $x=3$.
Corte con Y: $(0,3)$. Su simétrico respecto al eje $x=2$ es $(4,3)$.
Conclusión. Vértice $(\mathbf{2},\mathbf{-1})$; cortes $(\mathbf{1},\mathbf{0})$, $(\mathbf{3},\mathbf{0})$ y $(\mathbf{0},\mathbf{3})$. Decrece en $(-\infty,2)$ y crece en $(2,+\infty)$.



RESUELTO 4 · Beneficio máximo

El beneficio anual de la empresa Toldos Alisios, en miles de euros, es $B(x) = -2x^2 + 40x - 150$, donde x son los cientos de toldos vendidos. a) ¿Cuántos toldos debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio? b) ¿Entre qué ventas tiene beneficio?

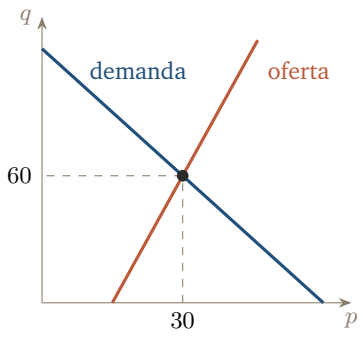
Planteamiento. $a = -2 < 0$: la parábola se abre hacia abajo y el vértice es el máximo.
Desarrollo. a) $x_v = \dfrac{-40}{2 \cdot (-2)} = 10$; $B(10) = -200 + 400 - 150 = 50$.

b) $-2x^2 + 40x - 150 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{2} = \dfrac{20 \pm 10}{2}$, es decir, $x = 5$ y $x = 15$. La parábola queda por encima del eje entre los dos cortes.
Comprobación. El vértice está en medio de los cortes: $\dfrac{5 + 15}{2} = 10$.
Conclusión. El beneficio máximo es de **50.000 €** y se alcanza vendiendo **1.000 toldos**. Hay beneficio entre **500 y 1.500 toldos**.

RESUELTO 5 · Oferta y demanda

En el mercado de un producto, la cantidad demandada es $D(p) = 120 - 2p$ y la ofrecida, $O(p) = 4p - 60$, donde p es el precio en euros. Halla el precio y la cantidad de equilibrio.

Planteamiento. El equilibrio es el precio al que se demanda lo mismo que se ofrece: el punto donde se cortan las dos rectas.
Desarrollo. $120 - 2p = 4p - 60 \Rightarrow 180 = 6p \Rightarrow p = 30$.
Cantidad: $D(30) = 120 - 60 = 60$.
Comprobación. $O(30) = 120 - 60 = 60$.
Conclusión. El precio de equilibrio es **30 €** y a ese precio se intercambian **60 unidades**. La demanda es decreciente, con pendiente -2, y la oferta, creciente, con pendiente 4.



RESUELTO 6 · Proporcionalidad inversa

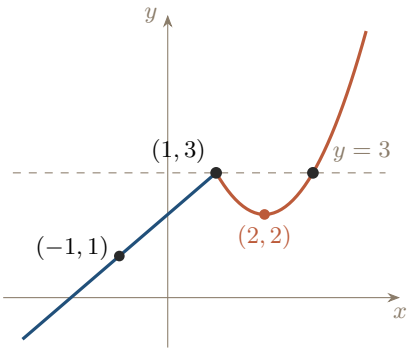
Un pintor tarda 12 días en pintar una nave. a) Escribe la función que da los días necesarios según el número n de pintores, si todos trabajan al mismo ritmo. b) ¿Cuánto tardan 4 pintores? c) ¿Cuántos hacen falta para terminar en 2 días?

Planteamiento. El trabajo total es fijo: 12 jornadas de pintor. Con el doble de pintores se tarda la mitad. Proporcionalidad inversa con $k = 12$.
Desarrollo. a) $t(n) = \dfrac{12}{n}$. b) $t(4) = \dfrac{12}{4} = 3$ días. c) $\dfrac{12}{n} = 2 \Rightarrow n = 6$ pintores.
Conclusión. Cuatro pintores tardan **3 días** y para acabar en 2 días hacen falta **6 pintores**. El dominio con sentido son los números naturales desde 1.

RESUELTO 7 · Una función a trozos

Dada $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\le 1 \\ x^2-4x+6 & \text{si } x>1 \end{cases}$ a) calcula $f(-1)$, $f(1)$ y $f(3)$; b) represéntala; c) resuelve $f(x)=3$.

Desarrollo. a) $-1\le 1$: primer tramo, $f(-1)=-1+2=1$. $1\le 1$: primer tramo, $f(1)=3$. $3>1$: segundo tramo, $f(3)=9-12+6=3$.
b) Primer tramo: recta por $(-1,1)$ y $(1,3)$, hasta $x=1$. Segundo tramo: parábola con vértice en $x_v=2$, $y_v=4-8+6=2$. En $x=1$ valdría $1-4+6=3$, lo mismo que la recta: los trozos se unen.
c) En el primer tramo: $x+2=3\Rightarrow x=1$, que cumple $x\le 1$. En el segundo: $x^2-4x+6=3\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1$ o $x=3$. Solo $x=3$ cumple $x>1$.
Conclusión. $f(x)=3$ en $\mathbf{x=1}$ y $\mathbf{x=3}$.



Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- En el dominio de un cociente, quitar las raíces del numerador. Solo importan las del denominador.
- En el dominio de una raíz, escribir $>$ en lugar de $\ge$. El radicando puede valer cero.
- Equivocar el signo en $x_v=\dfrac{-b}{2a}$ cuando b o a son negativos.
- Dar solo la x del vértice cuando se pregunta por el beneficio máximo. El beneficio es la y.
- En una función a trozos, evaluar con la fórmula del tramo equivocado.
- Dibujar un trozo más allá de su tramo.
- Al resolver $f(x)=k$ en una función a trozos, no comprobar si la solución cae dentro del tramo.
- Responder con el número de la fórmula sin traducirlo a las unidades del enunciado.

3. Ejercicios propuestos

Quince ejercicios en tres niveles. Las soluciones están en el apartado 5; los ejercicios 13 y 14 tienen allí su resolución completa.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Halla el dominio de: a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$ b) $g(x)=\sqrt{x+5}$ c) $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

2. Dada $f(x)=3x-2$, calcula $f(0)$ y $f(2)$, resuelve $f(x)=10$ y di cuál es su pendiente.

3. Halla la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $(1,2)$ y $(3,8)$.

4. Halla el vértice y los cortes con los ejes de $y=x^2-6x+5$ y represéntala.

5. Dada $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$, calcula $f(-2)$, $f(0)$ y $f(3)$.

NIVEL 2 · APLICAR

6. Representa $y=-x^2+2x+8$ e indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

7. Halla el dominio de: a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$

8. El gimnasio Pulso cobra 24 € al mes más 2 € por cada clase dirigida. El gimnasio Tempo no tiene cuota y cobra 5 € por clase. Escribe las dos funciones de coste mensual. ¿Con cuántas clases cuestan lo mismo? ¿Cuándo conviene cada uno?

9. Escribe $f(x) = |x - 2|$ como función a trozos, calcula $f(-1)$ y $f(5)$ y represéntala.

10. Seis operarios montan una instalación en 12 días. Escribe la función que da los días necesarios según el número de operarios. ¿Cuánto tardan 8? ¿Cuántos hacen falta para acabar en 4 días?

NIVEL 3 · PENSAR

11. Una tienda calcula que, si vende un artículo a p euros, la demanda es de $200 - 4p$ unidades. Escribe la función de ingresos y halla el precio que los hace máximos. ¿Cuánto ingresa a ese precio?

12. Halla b y c para que la parábola $y = x^2 + bx + c$ tenga el vértice en el punto $(2, -3)$.

13. Un ganadero dispone de 100 m de valla para cercar un recinto rectangular pegado a un muro, de modo que solo necesita vallar tres lados. ¿Qué dimensiones debe tener el recinto para que su superficie sea la mayor posible? ¿Cuál es esa superficie?

14. Una compañía eléctrica cobra la energía así: los primeros 100 kWh del mes, a 0,10 € cada uno; a partir de ahí, cada kWh adicional, a 0,25 €. a) Escribe la función que da el importe según el consumo x. b) Calcula el importe de 80 kWh y de 150 kWh. c) ¿Qué consumo corresponde a un importe de 30 €? d) Representa la función.

15. ¿Para qué valor de k la parábola $y = x^2 - 6x + k$ toca al eje X en un solo punto? ¿Qué ocurre si k es mayor que ese valor?

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · Las cuentas de Bicis Ribera

Bicis Ribera alquila bicicletas junto al río. Si en un día hace x alquileres, sus costes son $C(x) = 200 + 4x$ euros y sus ingresos, $I(x) = 16x - 0{,}1x^2$ euros.

a) ¿Qué tipo de función es cada una? Calcula el coste y los ingresos de un día con 50 alquileres.

b) Escribe la función de beneficio, $B(x) = I(x) - C(x)$.

c) ¿Cuántos alquileres dan el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

d) ¿Entre qué números de alquileres gana dinero la empresa? Representa $B(x)$.

e) El precio de un alquiler depende de las horas t: $P(t) = \begin{cases} 3t & \text{si } 0 < t \leq 4 \\ 2t + 4 & \text{si } t > 4 \end{cases}$. Calcula lo que se paga por 2 horas y por 6 horas, y cuántas horas se pueden alquilar con 20 €.

5. Soluciones

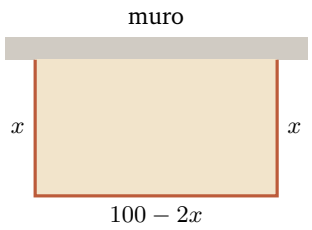
Ejercicios propuestos

1. a) $\mathbb{R} - \{3\}$; b) $[-5,\ +\infty)$; c) $\mathbb{R}$, porque $x^2 + 1$ nunca vale cero.
2. $f(0) = -2$; $f(2) = 4$; $3x - 2 = 10 \Rightarrow x = 4$; pendiente 3.
3. $m = \dfrac{8-2}{3-1} = 3$; $2 = 3 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -1$. $f(x) = 3x - 1$.
4. Vértice $(3, -4)$; cortes con X en $(1, 0)$ y $(5, 0)$; corte con Y en $(0, 5)$.
5. $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$; $f(0) = 0^2 = 0$; $f(3) = 9$.
6. Vértice $(1, 9)$, máximo; cortes con X en $(-2, 0)$ y $(4, 0)$; corte con Y en $(0, 8)$. Crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.
7. a) $x^2 - 9 \geq 0$: $(-\infty,\ -3] \cup [3,\ +\infty)$; b) $x^2 - 5x + 6 = 0$ en $x = 2$ y $x = 3$: $\mathbb{R} - \{2,\ 3\}$.
8. $P(x) = 24 + 2x$; $T(x) = 5x$. Iguales si $24 + 2x = 5x \Rightarrow x = 8$ clases, con un coste de 40 €. Con menos de 8 clases al mes conviene Tempo; con más de 8, Pulso.
9. $|x - 2| = -x + 2$ si $x < 2$, y $x - 2$ si $x \geq 2$. $f(-1) = 3$; $f(5) = 3$. Gráfica en V con vértice en $(2, 0)$.
10. Trabajo total: $6 \cdot 12 = 72$ jornadas. $t(n) = \dfrac{72}{n}$. $t(8) = 9$ días. $\dfrac{72}{n} = 4 \Rightarrow n = 18$ operarios.
11. $I(p) = p\,(200 - 4p) = 200p - 4p^2$. Vértice: $p = \dfrac{-200}{-8} = 25$ €. $I(25) = 5.000 - 2.500 = 2.500$ €.
12. $x_v = \dfrac{-b}{2} = 2 \Rightarrow b = -4$. $y_v = 4 - 8 + c = -3 \Rightarrow c = 1$. $y = x^2 - 4x + 1$.
13. 25 m de ancho por 50 m de largo; 1.250 m^2 (resolución completa a continuación).
14. 8 € y 22,50 €; 180 kWh (resolución completa a continuación).
15. Toca en un solo punto si el discriminante es cero: $36 - 4k = 0 \Rightarrow k = 9$, y el punto es el vértice, $(3, 0)$. Si $k > 9$ el discriminante es negativo y la parábola no corta al eje X: queda entera por encima.

Resolución completa del ejercicio 13

Planteamiento. Se llama x a cada uno de los dos lados perpendiculares al muro. El lado paralelo al muro mide lo que queda de valla: $100 - 2x$. La superficie es

$$A(x) = x\,(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$$

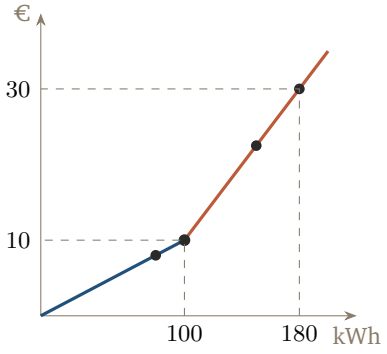


Es una parábola abierta hacia abajo. Su vértice da la superficie máxima.
Desarrollo. $x_v = \dfrac{-100}{2 \cdot (-2)} = 25$ m. Lado paralelo al muro: $100 - 50 = 50$ m. $A(25) = 25 \cdot 50 = 1.250$ m^2.
Comprobación. Los cortes de $A(x)$ con el eje son $x = 0$ y $x = 50$, y el vértice está en medio. Con $x = 20$ saldrían $20 \cdot 60 = 1.200$ m^2 y con $x = 30$, $30 \cdot 40 = 1.200$ m^2. Los dos, menores.
Conclusión. El recinto debe medir **25 m de ancho por 50 m de largo**, con el lado largo paralelo al muro. Su superficie será de **1.250 m^2**.

Resolución completa del ejercicio 14

a) Hasta 100 kWh se paga $0{,}10x$. Por encima, los 100 primeros cuestan 10 € y cada uno de los $x-100$ restantes, 0,25 €:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}10x & \text{si } 0 \le x \le 100 \\ 10 + 0{,}25\,(x - 100) & \text{si } x > 100 \end{cases}$$



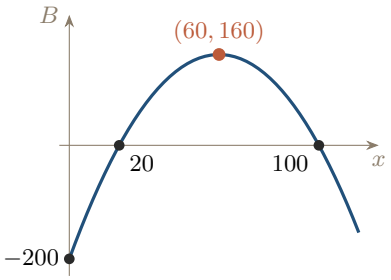
El segundo tramo, operado, es $0{,}25x - 15$.
b) $80 \le 100$: $f(80) = 0{,}10 \cdot 80 = 8$ €. $150 > 100$: $f(150) = 10 + 0{,}25 \cdot 50 = 22{,}50$ €.
c) El primer tramo llega como mucho a 10 €, así que 30 € está en el segundo: $10 + 0{,}25\,(x - 100) = 30 \Rightarrow x - 100 = 80 \Rightarrow x = 180$ kWh.
d) Dos segmentos que se unen en $(100, 10)$: uno con pendiente $0{,}10$ y otro, más inclinado, con pendiente $0{,}25$.
Conclusión. 80 kWh cuestan **8 €**, 150 kWh cuestan **22,50 €** y a un importe de 30 € le corresponden **180 kWh**.

Ejercicio de síntesis

a) $C(x)$ es lineal, con 200 € de coste fijo y 4 € por alquiler. $I(x)$ es cuadrática. $C(50) = 200 + 200 = 400$ €. $I(50) = 800 - 0{,}1 \cdot 2.500 = 550$ €.
b) $B(x) = 16x - 0{,}1x^2 - (200 + 4x) = -0{,}1x^2 + 12x - 200$.

c) $x_v = \dfrac{-12}{2 \cdot (-0{,}1)} = 60$ alquileres. $B(60) = -360 + 720 - 200 = 160$ €.

d) $-0{,}1x^2 + 12x - 200 = 0 \Rightarrow x^2 - 120x + 2.000 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{120 \pm \sqrt{14.400 - 8.000}}{2} = \dfrac{120 \pm 80}{2}$, es decir, $x = 20$ y $x = 100$. Gana dinero con más de 20 y menos de 100 alquileres al día. Corte con el eje vertical: $(0, -200)$.



e) $2 \leq 4$: $P(2) = 3 \cdot 2 = 6$ €. $6 > 4$: $P(6) = 12 + 4 = 16$ €. El primer tramo llega como mucho a $3 \cdot 4 = 12$ €, así que 20 € está en el segundo: $2t + 4 = 20 \Rightarrow t = 8$ horas.

Conclusión. El beneficio máximo es de **160 € al día, con 60 alquileres**. Hay beneficio entre 20 y 100 alquileres. Dos horas cuestan 6 €, seis horas cuestan 16 € y con 20 € se alquilan **8 horas**.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Hallar el dominio de un polinomio, de un cociente y de una raíz cuadrada.
- ☐ Escribir una función lineal a partir de un coste fijo y un coste por unidad, o de dos puntos.
- ☐ Comparar dos tarifas lineales y decir cuándo conviene cada una.
- ☐ Calcular el vértice y los cortes de una parábola y dibujarla con cinco puntos.
- ☐ Interpretar el vértice como beneficio, ingreso o superficie máximos.
- ☐ Reconocer una proporcionalidad inversa y escribir su función.
- ☐ Elegir el tramo correcto para evaluar una función a trozos.
- ☐ Representar una función a trozos y resolver $f(x) = k$ comprobando el tramo.
- ☐ Decir dónde crece y decrece una función y dónde tiene sus máximos y mínimos.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 9 · TODO EN MEDIA CARA

Dominio	polinomio: $\mathbb{R}$ · cociente: $\mathbb{R}$ menos las raíces del denominador · raíz cuadrada: radicando ≥ 0
Lineal	$f(x) = mx + n$ · pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ · ordenada en el origen $n = f(0)$
Cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$ · vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, $y_v = f(x_v)$ · $a > 0$: mínimo · $a < 0$: máximo
Cortes	con X: resolver $f(x) = 0$ · con Y: el punto $(0,\ f(0))$
Inversa	$f(x) = \dfrac{k}{x}$ · $x \cdot y = k$ · dominio $\mathbb{R} - \{0\}$
A trozos	primero el tramo, después la fórmula · cada trozo se dibuja solo en su tramo · en $f(x) = k$, comprobar que la solución está en el tramo
Valor absoluto	$\lvert x - a\rvert = -(x - a)$ si $x < a$ · $\lvert x - a\rvert = x - a$ si $x \geq a$ · vértice en $(a,\ 0)$

El vértice de una parábola está en el punto medio de sus dos cortes con el eje X · la respuesta, siempre en las unidades del enunciado.