BLOQUE II · MATEMÁTICA FINANCIERA

Unidad 8

Anualidades

Progresiones geométricas y su suma · planes de ahorro · aportaciones mensuales · la cuota de un préstamo · el cuadro de amortización · cuánto se paga de intereses · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. En la unidad 7 el dinero se ingresaba una vez y se dejaba crecer. En la vida real casi nadie ahorra ni paga así. Se ahorra un poco cada mes y se devuelve un préstamo en cuotas. Un plan de pensiones, la letra de un coche y una hipoteca funcionan con las dos fórmulas de esta unidad, y las dos salen de una misma idea: sumar los términos de una progresión geométrica.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Progresiones geométricas	hallar un término y sumar los n primeros
2. Capitalización	calcular lo que reúne un plan de ahorro con aportaciones periódicas
3. Aportación necesaria	hallar cuánto hay que aportar para alcanzar un objetivo
4. Amortización	calcular la cuota de un préstamo
5. Cuadro de amortización	separar cada cuota en intereses y devolución de deuda
6. Coste de un préstamo	hallar el total pagado y los intereses, y comparar plazos

Notación de toda la unidad. Se mantiene la de la unidad 7: C_0 capital inicial, C_f capital final, r tipo anual en tanto por uno, t años y k periodos al año. Se añaden tres letras: a es la cantidad fija que se aporta o se paga en cada periodo, $i = \dfrac{r}{k}$ es el tipo de interés de un periodo y $n = k \cdot t$ es el número total de periodos.

1. Teoría

1.1 · Progresiones geométricas

PARA MEMORIZAR

Progresión geométrica: sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, la **razón** q.

Término general: $a_n = a_1 \cdot q^{\,n-1}$ Suma de los n primeros términos: $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

Ejemplo. En la progresión $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \ldots$ el primer término es $a_1 = 3$ y la razón, $q = 2$. Octavo término: $a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384$. Suma de los ocho primeros: $S_8 = 3 \cdot \dfrac{2^8 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 255 = 765$.

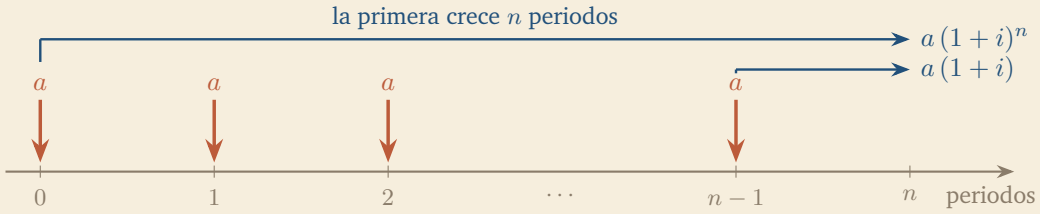


CONEXIÓN · EL INTERÉS COMPUESTO YA ERA UNA PROGRESIÓN

Un capital al 4 % anual vale cada año el del año anterior multiplicado por $1{,}04$. Los capitales de años sucesivos forman una progresión geométrica de razón $1{,}04$. Por eso la suma de una progresión geométrica aparece en cuanto hay varios ingresos creciendo a la vez.

1.2 · Anualidades de capitalización: el plan de ahorro

Se aporta una cantidad fija a al **principio** de cada periodo, durante n periodos, a un tipo i por periodo. Cada aportación crece por su cuenta con interés compuesto, y cada una lo hace durante un tiempo distinto.



La última aportación solo está un periodo y se convierte en $a\,(1+i)$. La anterior, en $a\,(1+i)^2$. La primera, en $a\,(1+i)^n$. El capital final es la suma de todas, que es la suma de una progresión geométrica de primer término $a\,(1+i)$ y razón $(1+i)$.

PARA MEMORIZAR

Capital final de un plan de ahorro (aportaciones al principio de cada periodo)

$$C_f = a\,(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Total aportado: $a\cdot n$. Intereses ganados: $C_f - a\cdot n$.

Ejemplo con aportación anual. 2.000 € al principio de cada año, durante 10 años, al 4 % anual. Aquí $i = 0{,}04$ y $n = 10$.

$$C_f = 2.000\cdot 1{,}04\cdot\frac{1{,}04^{10}-1}{0{,}04} = 2.080\cdot\frac{0{,}480244}{0{,}04} = 24.972{,}70\,€$$

Se han aportado $2.000\cdot 10 = 20.000$ €. Los intereses son $4.972{,}70$ €.

Ejemplo con aportación mensual. 150 € al principio de cada mes, durante 5 años, al 3 % anual. Tipo mensual: $i = 0{,}03 : 12 = 0{,}0025$. Número de meses: $n = 12\cdot 5 = 60$.

$$C_f = 150\cdot 1{,}0025\cdot\frac{1{,}0025^{60}-1}{0{,}0025} = 9.721{,}25\,€$$

Aportado: $150\cdot 60 = 9.000$ €. Intereses: $721{,}25$ €.



AVISO · ¿AL PRINCIPIO O AL FINAL DEL PERIODO?

En esta unidad, las aportaciones de un plan de ahorro se hacen al principio de cada periodo, que es lo habitual y lo que supondrá el examen si no dice otra cosa. Si un enunciado indica que se aporta al **final** de cada periodo, cada aportación crece un periodo menos y la fórmula pierde el factor $(1+i)$: $C_f = a \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$. En el primer ejemplo saldrían $24.012{,}21$ €.



TRUCO · LA POTENCIA, CON TODOS SUS DECIMALES

Calcula primero la potencia y guárdala en la memoria de la calculadora. Si la redondeas a dos decimales, el error se multiplica por miles de euros. Escribe en el papel seis decimales ($1{,}04^{10} = 1{,}480244$) y opera con el valor completo de la calculadora. Solo se redondea el resultado final, a céntimos.

1.3 · Anualidades de amortización: la cuota de un préstamo

Un banco presta un capital C_0 y el cliente lo devuelve con n cuotas iguales a, pagadas al **final** de cada periodo. Las cuotas tienen que devolver el capital y pagar los intereses de lo que se debe en cada momento.

La fórmula sale de comparar dos cosas en la fecha del último pago. Por un lado, lo que valdría la deuda si no se pagara nada: $C_0\,(1+i)^n$. Por otro, lo que valen juntas todas las cuotas pagadas, que es otra suma de progresión geométrica: $a \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$. El préstamo queda saldado cuando las dos cantidades coinciden.

PARA MEMORIZAR

Cuota de un préstamo (cuotas al final de cada periodo)

$$a = C_0 \cdot \frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Total pagado: $a \cdot n$. Intereses pagados: $a \cdot n - C_0$.

Ejemplo. Préstamo de 10.000 € a 5 años, al 6 % anual, con cuotas anuales. $i = 0{,}06$, $n = 5$ y $1{,}06^5 = 1{,}338226$.

$$a = 10.000 \cdot \frac{0{,}06 \cdot 1{,}338226}{1{,}338226 - 1} = 10.000 \cdot \frac{0{,}080294}{0{,}338226} = 2.373{,}96\,€$$

Total pagado: $2.373{,}96 \cdot 5 = 11.869{,}80$ €. Intereses: $1.869{,}80$ €.

1.4 · El cuadro de amortización

Todas las cuotas son iguales, pero no todas hacen lo mismo. Una parte de cada cuota paga los intereses del periodo y el resto reduce la deuda. A esa segunda parte se la llama **amortización**.

PARA MEMORIZAR

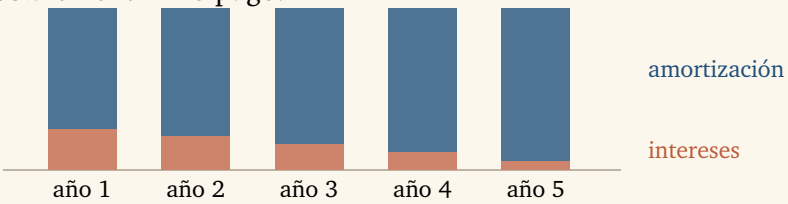
Cada fila del cuadro, en tres cuentas

1. **Intereses** del periodo = deuda pendiente al empezar el periodo $\times\, i$.
2. **Amortización** = cuota − intereses.
3. **Deuda pendiente** nueva = deuda anterior − amortización.

Ejemplo. Cuadro del préstamo anterior: 10.000 €, 5 años, 6 %, cuota de 2.373,96 €.

Año	Cuota	Intereses	Amortización	Deuda pendiente
0				10.000,00
1	2.373,96	600,00	1.773,96	8.226,04
2	2.373,96	493,56	1.880,40	6.345,64
3	2.373,96	380,74	1.993,22	4.352,42
4	2.373,96	261,15	2.112,81	2.239,61
5	2.373,96	134,38	2.239,58	0,03

Primera fila: intereses $10.000 \cdot 0{,}06 = 600$; amortización $2.373{,}96 - 600 = 1.773{,}96$; deuda $10.000 - 1.773{,}96 = 8.226{,}04$. Los 3 céntimos que quedan al final vienen de redondear la cuota. El banco los ajusta en el último pago.



La barra mide siempre lo mismo, la cuota. Al principio se debe mucho y los intereses pesan más. Según baja la deuda, la parte de intereses encoge y la de amortización crece.



PARA EL EXAMEN · DOS COMPROBACIONES DEL CUADRO

La deuda de la última fila tiene que salir cero, salvo unos céntimos de redondeo. Y la columna de amortización tiene que sumar el capital prestado. Si alguna de las dos falla, hay un error en una fila anterior.

1.5 · Préstamos con cuota mensual

Con pagos mensuales se usan las mismas fórmulas con el tipo mensual $i = \dfrac{r}{12}$ y $n = 12 \cdot t$ meses. Es el caso de las hipotecas y de casi todos los préstamos personales. Como en la unidad 7, cambian dos números a la vez: el tipo se divide entre 12 y los periodos se multiplican por 12. Una hipoteca a 25 años al 3 % se calcula con $i = 0{,}0025$ y $n = 300$.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, resultado y conclusión.

RESUELTO 1 · Suma de una progresión geométrica

Nerea empieza a trabajar con un sueldo de 24.000 € anuales, y cada año se lo suben un 3 %. a) ¿Cuánto cobrará el décimo año? b) ¿Cuánto habrá cobrado en total en esos diez años?

Planteamiento. Subir un 3 % es multiplicar por $1{,}03$. Los sueldos forman una progresión geométrica con $a_1 = 24.000$ y $q = 1{,}03$.
Desarrollo. a) $a_{10} = 24.000 \cdot 1{,}03^9 = 24.000 \cdot 1{,}304773 = 31.314{,}56$ €.
b) $S_{10} = 24.000 \cdot \dfrac{1{,}03^{10} - 1}{1{,}03 - 1} = 24.000 \cdot \dfrac{0{,}343916}{0{,}03} = 275.133{,}10$ €.
Conclusión. El décimo año cobrará **31.314,56 €** y en los diez años habrá cobrado **275.133,10 €**. Sin subidas habrían sido 240.000 €.

RESUELTO 2 · Plan de ahorro con aportación anual

Julián ingresa 1.500 € al principio de cada año en un plan que rinde un 5 % anual. ¿Cuánto tendrá al cabo de 15 años? ¿Qué parte son intereses?

Planteamiento. Anualidad de capitalización con $a = 1.500$, $i = 0{,}05$ y $n = 15$.
Desarrollo. $1{,}05^{15} = 2{,}078928$. $C_f = 1.500 \cdot 1{,}05 \cdot \dfrac{2{,}078928 - 1}{0{,}05} = 1.575 \cdot 21{,}578564 = 33.986{,}24$ €.
Aportado: $1.500 \cdot 15 = 22.500$ €. Intereses: $33.986{,}24 - 22.500 = 11.486{,}24$ €.
Conclusión. Tendrá **33.986,24 €**, de los que **11.486,24 €** son intereses: uno de cada tres euros del total.

RESUELTO 3 · ¿Cuánto hay que aportar?

Una familia quiere reunir 20.000 € en 8 años para los estudios de su hija. El plan que le ofrecen rinde un 3,5 % anual. ¿Qué cantidad debe ingresar al principio de cada año?

Planteamiento. Se conoce $C_f = 20.000$ y se busca a. Se despeja en la fórmula de capitalización.
Desarrollo. $1{,}035^8 = 1{,}316809$. El número que multiplica a la aportación es

$$1{,}035 \cdot \frac{1{,}316809 - 1}{0{,}035} = 9{,}368496 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{20.000}{9{,}368496} = 2.134{,}81 \text{ €}$$

Comprobación. $2.134{,}81 \cdot 9{,}368496 = 20.000$ €, salvo céntimos.
Conclusión. Debe ingresar **2.134,81 € cada año**. En total aportará $17.078{,}48$ €, y el resto lo ponen los intereses.

RESUELTO 4 · Plan de ahorro con aportación mensual

Carla ingresa 120 € al principio de cada mes en una cuenta que rinde un 3,6 % anual con capitalización mensual. ¿Cuánto tendrá dentro de 6 años y cuánto habrá ganado en intereses?

Planteamiento. Todo en meses: $i = 0{,}036 : 12 = 0{,}003$ y $n = 12 \cdot 6 = 72$.
Desarrollo. $1{,}003^{72} = 1{,}240701$. $\quad C_f = 120 \cdot 1{,}003 \cdot \dfrac{1{,}240701 - 1}{0{,}003} = 9.656{,}93\,€$.
Aportado: $120 \cdot 72 = 8.640\,€$. Intereses: $9.656{,}93 - 8.640 = 1.016{,}93\,€$.
Conclusión. Tendrá **9.656,93 €**, con **1.016,93 €** de intereses.

RESUELTO 5 · Cuota anual de un préstamo

Una empresa pide un préstamo de 15.000 € para comprar una furgoneta. Lo devolverá en 6 cuotas anuales, al 7 % anual. Calcula la cuota y los intereses totales.

Planteamiento. Anualidad de amortización con $C_0 = 15.000$, $i = 0{,}07$ y $n = 6$.
Desarrollo. $1{,}07^6 = 1{,}500730$. $\quad a = 15.000 \cdot \dfrac{0{,}07 \cdot 1{,}500730}{1{,}500730 - 1} = 15.000 \cdot 0{,}209796 = 3.146{,}94\,€$.
Total pagado: $3.146{,}94 \cdot 6 = 18.881{,}64\,€$. Intereses: $18.881{,}64 - 15.000 = 3.881{,}64\,€$.
Conclusión. Pagará **3.146,94 € al año**. El préstamo le cuesta **3.881,64 €** en intereses.

RESUELTO 6 · Cuadro de amortización

Construye el cuadro de amortización de un préstamo de 8.000 € a 4 años, al 5 % anual, con cuotas anuales.

Planteamiento. Primero la cuota. Después, fila a fila: intereses, amortización y deuda.
Desarrollo. $1{,}05^4 = 1{,}215506$. $\quad a = 8.000 \cdot \dfrac{0{,}05 \cdot 1{,}215506}{0{,}215506} = 2.256{,}09\,€$.

Año	Cuota	Intereses	Amortización	Deuda pendiente
0				8.000,00
1	2.256,09	400,00	1.856,09	6.143,91
2	2.256,09	307,20	1.948,89	4.195,02
3	2.256,09	209,75	2.046,34	2.148,68
4	2.256,09	107,43	2.148,66	0,02

Fila 2, como muestra: intereses $6.143{,}91 \cdot 0{,}05 = 307{,}20$; amortización $2.256{,}09 - 307{,}20 = 1.948{,}89$; deuda $6.143{,}91 - 1.948{,}89 = 4.195{,}02$.
Comprobación. La deuda final es 0, con 2 céntimos de redondeo. Las amortizaciones suman $7.999{,}98\,€$.
Conclusión. Intereses totales: $400 + 307{,}20 + 209{,}75 + 107{,}43 = 1.024{,}38\,€$, que coincide con $4 \cdot 2.256{,}09 - 8.000 = 1.024{,}36\,€$ salvo el redondeo.

RESUELTO 7 · Una hipoteca

Una pareja firma una hipoteca de 120.000 € a 25 años, al 3 % anual, con cuotas mensuales. a) ¿Cuánto pagará cada mes? b) ¿Cuánto habrá pagado al terminar y cuánto serán intereses? c) En la primera cuota, ¿cuánto corresponde a intereses?

Planteamiento. Todo en meses: $i = 0{,}03 : 12 = 0{,}0025$ y $n = 12 \cdot 25 = 300$.

Desarrollo. a) $1{,}0025^{300} = 2{,}115020$. $\quad a = 120.000 \cdot \dfrac{0{,}0025 \cdot 2{,}115020}{2{,}115020 - 1} = 569{,}05\,€$.

b) Total: $569{,}05 \cdot 300 = 170.715\,€$. Intereses: $170.715 - 120.000 = 50.715\,€$.

c) Intereses del primer mes: $120.000 \cdot 0{,}0025 = 300\,€$. Amortización: $569{,}05 - 300 = 269{,}05\,€$.

Conclusión. Pagarán **569,05 € al mes**. Al final habrán pagado **170.715 €**, de los que **50.715 €** son intereses. En la primera cuota, más de la mitad son intereses.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Usar el tipo anual con periodos mensuales, o al revés.
- Escribir el tipo como porcentaje: $i = 3$ en lugar de $i = 0{,}03$.
- Redondear la potencia a dos decimales.
- Confundir las dos fórmulas. En el plan de ahorro se busca un capital final. En el préstamo se parte de un capital inicial.
- Calcular la cuota dividiendo el capital entre el número de pagos, sin intereses.
- En el cuadro, calcular los intereses siempre sobre el capital inicial. Se calculan sobre la deuda pendiente.
- Dar los intereses de un plan como C_f, sin restar lo aportado.

3. Ejercicios propuestos

Quince ejercicios en tres niveles. Las soluciones están en el apartado 5; los ejercicios 13 y 14 tienen allí su resolución completa. Salvo que se diga otra cosa, las aportaciones de ahorro se hacen al principio de cada periodo y las cuotas de préstamo se pagan al final.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. En la progresión geométrica $5,\ 10,\ 20,\ \ldots$ calcula el décimo término y la suma de los diez primeros.

2. Calcula la suma de los seis primeros términos de la progresión geométrica con $a_1 = 1.000$ y $q = 1{,}05$.

3. Se ingresan 1.000 € al principio de cada año, durante 5 años, al 3 % anual. ¿Cuál es el capital final?

4. Calcula la cuota anual de un préstamo de 5.000 € a 3 años al 4 % anual.

5. En el préstamo del ejercicio anterior, ¿cuánto se paga de intereses el primer año y cuánto se amortiza?

NIVEL 2 · APLICAR

6. Sergio ahorra 80 € al principio de cada mes en una cuenta al 2,4 % anual con capitalización mensual. ¿Cuánto tendrá a los 4 años? ¿Cuánto son intereses?

7. ¿Qué cantidad hay que ingresar al principio de cada año para reunir 30.000 € en 12 años al 4 % anual?

8. Un coche de 18.000 € se financia a 5 años al 6 % anual con cuotas mensuales. Calcula la cuota y los intereses totales.

9. Construye el cuadro de amortización de un préstamo de 6.000 € a 3 años al 5 % anual, con cuotas anuales.

10. Dos hermanas ahorran 1.000 € al año durante 10 años al 4 % anual. Una ingresa el dinero al principio de cada año y la otra, al final. ¿Cuánto tiene cada una y a qué se debe la diferencia?

NIVEL 3 · PENSAR

11. Pablo ingresa 2.000 € al principio de cada año al 4 % anual. ¿Cuántos años necesita para reunir 30.000 €?

12. Elena puede pagar 400 € al mes durante 10 años. Si el banco le presta al 4,8 % anual, ¿cuál es el préstamo máximo que puede pedir?

13. Una hipoteca de 150.000 € al 3,6 % anual se puede firmar a 30 años o a 20 años, con cuotas mensuales. Calcula la cuota y los intereses totales en cada caso y compara las dos opciones.

14. Aitana empieza a los 35 años a aportar 100 € al mes a un plan de pensiones, hasta los 65. Bruno empieza a los 45 y aporta 150 € al mes, también hasta los 65. Los dos planes rinden un 3 % anual con capitalización mensual. ¿Quién aporta más? ¿Quién reúne más? Explica el resultado.

15. Con 100 € al mes al 3 % anual: a) calcula el capital reunido en 10 años y en 20 años; b) calcula el capital reunido en 10 años aportando 200 € al mes; c) ¿qué conviene más, duplicar la aportación o duplicar el tiempo? ¿Por qué no dan lo mismo?

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · Marta y Diego compran un piso

Marta y Diego quieren comprar un piso. Antes de pedir la hipoteca necesitan ahorrar la entrada.
a) Durante 4 años ingresan 500 € al principio de cada mes en una cuenta al 2,4 % anual con capitalización mensual. ¿Cuánto reúnen para la entrada? ¿Cuánto son intereses?
b) Después firman una hipoteca de 160.000 € a 25 años, al 3 % anual, con cuotas mensuales. Calcula la cuota.
c) ¿Cuánto habrán pagado en total al terminar? ¿Cuánto corresponde a intereses?
d) Escribe la primera fila del cuadro de amortización: intereses del primer mes, amortización y deuda pendiente.
e) El banco les ofrece la misma hipoteca a 20 años. Calcula la nueva cuota y lo que se ahorrarían en intereses. ¿Qué hay que valorar para elegir?

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. $a_{10} = 5 \cdot 2^9 = 2.560$; $S_{10} = 5 \cdot (2^{10} - 1) = 5.115$.

2. $S_6 = 1.000 \cdot \dfrac{1{,}05^6 - 1}{0{,}05} = 6.801{,}91$.

3. $C_f = 1.000 \cdot 1{,}03 \cdot \dfrac{1{,}03^5 - 1}{0{,}03} = 5.468{,}41$ €.

4. $a = 5.000 \cdot \dfrac{0{,}04 \cdot 1{,}04^3}{1{,}04^3 - 1} = 1.801{,}74$ €.

5. Intereses: $5.000 \cdot 0{,}04 = 200$ €. Amortización: $1.801{,}74 - 200 = 1.601{,}74$ €.

6. $i = 0{,}002$, $n = 48$: $C_f = 4.034{,}19$ €. Aportado: 3.840 €. Intereses: $194{,}19$ €.

7. El factor es $1{,}04 \cdot \dfrac{1{,}04^{12} - 1}{0{,}04} = 15{,}626838$; $a = 30.000 : 15{,}626838 = 1.919{,}77$ €.

8. $i = 0{,}005$, $n = 60$: $a = 347{,}99$ €. Total: $20.879{,}40$ €. Intereses: $2.879{,}40$ €.

9. Cuota: $2.203{,}25$ €. Fila 1: intereses 300; amortización $1.903{,}25$; deuda $4.096{,}75$. Fila 2: $204{,}84$; $1.998{,}41$; $2.098{,}34$. Fila 3: $104{,}92$; $2.098{,}33$; $0{,}01$.

10. Al principio: $12.486{,}35$ €. Al final: $12.006{,}11$ €. La diferencia, $480{,}24$ €, es un año más de intereses para cada aportación: $12.006{,}11 \cdot 1{,}04 = 12.486{,}35$.

11. $2.000 \cdot 1{,}04 \cdot \dfrac{1{,}04^t - 1}{0{,}04} = 30.000 \Rightarrow 1{,}04^t = 1{,}576923 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}576923}{\log 1{,}04} = 11{,}61$. Necesita **12 años**: con 11 reúne $28.051{,}61$ € y con 12, $31.253{,}68$ €.

12. Se despeja C_0 en la fórmula de la cuota: $C_0 = a \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}$, con $i = 0{,}004$ y $n = 120$. $C_0 = 400 \cdot \dfrac{1{,}614528 - 1}{0{,}004 \cdot 1{,}614528} = 38.062{,}39$ €.

13. A 30 años: cuota $681{,}97$ €, intereses $95.509{,}20$ €. A 20 años: cuota $877{,}67$ €, intereses $60.640{,}80$ € (resolución completa a continuación).

14. Los dos aportan 36.000 €. Aitana reúne $58.419{,}37$ € y Bruno, $49.368{,}41$ € (resolución completa a continuación).

15. a) $14.009{,}08$ € y $32.912{,}28$ €; b) $28.018{,}15$ €; c) duplicar el tiempo da más. Con el doble de aportación todo se multiplica por 2. Con el doble de tiempo se aporta el doble y, además, los intereses de los primeros años siguen produciendo intereses durante otros diez: el capital se multiplica por $2{,}35$.

Resolución completa del ejercicio 13

Planteamiento. $C_0 = 150.000$ y tipo mensual $i = 0{,}036 : 12 = 0{,}003$. Cambia el número de meses: $n = 360$ o $n = 240$.
Desarrollo. A 30 años: $1{,}003^{360} = 2{,}939923$. $\quad a = 150.000 \cdot \dfrac{0{,}003 \cdot 2{,}939923}{1{,}939923} = 681{,}97\,€$.
Total: $681{,}97 \cdot 360 = 245.509{,}20\,€$. Intereses: $95.509{,}20\,€$.
A 20 años: $1{,}003^{240} = 2{,}052220$. $\quad a = 150.000 \cdot \dfrac{0{,}003 \cdot 2{,}052220}{1{,}052220} = 877{,}67\,€$.
Total: $877{,}67 \cdot 240 = 210.640{,}80\,€$. Intereses: $60.640{,}80\,€$.
Resultado.

	Cuota mensual	Total pagado	Intereses
30 años	681,97 €	245.509,20 €	95.509,20 €
20 años	877,67 €	210.640,80 €	60.640,80 €

Conclusión. A 20 años la cuota sube $195{,}70\,€$ al mes y los intereses bajan $34.868{,}40\,€$. El plazo largo alivia cada mes y encarece el total. La elección depende de si la familia puede asumir la cuota alta sin apuros.

Resolución completa del ejercicio 14

Planteamiento. Dos planes de ahorro mensuales con $i = 0{,}03 : 12 = 0{,}0025$. Aitana: $a = 100$ y $n = 12 \cdot 30 = 360$. Bruno: $a = 150$ y $n = 12 \cdot 20 = 240$.
Desarrollo. Aportado por Aitana: $100 \cdot 360 = 36.000\,€$. Aportado por Bruno: $150 \cdot 240 = 36.000\,€$.
Aitana: $1{,}0025^{360} = 2{,}456842$. $\quad C_f = 100 \cdot 1{,}0025 \cdot \dfrac{1{,}456842}{0{,}0025} = 58.419{,}37\,€$.
Bruno: $1{,}0025^{240} = 1{,}820755$. $\quad C_f = 150 \cdot 1{,}0025 \cdot \dfrac{0{,}820755}{0{,}0025} = 49.368{,}41\,€$.
Resultado. Los dos aportan lo mismo, $36.000\,€$. Aitana reúne $58.419{,}37\,€$ y Bruno, $49.368{,}41\,€$.
Conclusión. Aitana termina con **9.050,96 € más** poniendo el mismo dinero. Sus primeras aportaciones pasan treinta años generando intereses, y las de Bruno, veinte como mucho. En el ahorro a largo plazo, empezar antes pesa más que aportar más.

Ejercicio de síntesis

a) $i = 0{,}024 : 12 = 0{,}002$ y $n = 48$. $1{,}002^{48} = 1{,}100654$. $C_f = 500 \cdot 1{,}002 \cdot \dfrac{0{,}100654}{0{,}002} = 25.213{,}71\,€$. Aportado: $500 \cdot 48 = 24.000\,€$. Intereses: $1.213{,}71\,€$.
b) $i = 0{,}0025$ y $n = 300$. $1{,}0025^{300} = 2{,}115020$. $a = 160.000 \cdot \dfrac{0{,}0025 \cdot 2{,}115020}{1{,}115020} = 758{,}74\,€$ al mes.
c) Total: $758{,}74 \cdot 300 = 227.622\,€$. Intereses: $227.622 - 160.000 = 67.622\,€$.
d) Intereses del primer mes: $160.000 \cdot 0{,}0025 = 400\,€$. Amortización: $758{,}74 - 400 = 358{,}74\,€$. Deuda pendiente: $160.000 - 358{,}74 = 159.641{,}26\,€$.
e) Con $n = 240$: $1{,}0025^{240} = 1{,}820755$. $a = 160.000 \cdot \dfrac{0{,}0025 \cdot 1{,}820755}{0{,}820755} = 887{,}36\,€$. Total: $887{,}36 \cdot 240 = 212.966{,}40\,€$. Intereses: $52.966{,}40\,€$. Se ahorrarían $67.622 - 52.966{,}40 = 14.655{,}60\,€$ en intereses a cambio de pagar $128{,}62\,€$ más cada mes. Hay que valorar si esa cuota cabe con holgura en sus ingresos mensuales durante veinte años.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Reconocer una progresión geométrica, hallar un término y sumar los n primeros.
- ☐ Pasar de tipo anual y años a tipo por periodo y número de periodos.
- ☐ Calcular el capital final de un plan de ahorro y separar aportaciones e intereses.
- ☐ Hallar la aportación necesaria para alcanzar un capital.
- ☐ Calcular la cuota de un préstamo, el total pagado y los intereses.
- ☐ Rellenar una fila del cuadro de amortización a partir de la deuda pendiente.
- ☐ Comprobar un cuadro con la deuda final y la suma de amortizaciones.
- ☐ Comparar dos plazos de un mismo préstamo y explicar qué cambia.
- ☐ Explicar por qué al principio de un préstamo casi toda la cuota son intereses.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 8 · TODO EN MEDIA CARA

Progresión geométrica	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $\quad S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$
Periodos	$i = \dfrac{r}{k}$ $\quad n = k \cdot t$ $\quad$ (mensual: $k = 12$)
Plan de ahorro	$C_f = a\,(1+i) \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ $\quad$ aportaciones al principio de cada periodo
Intereses del plan	$C_f - a \cdot n$
Cuota de un préstamo	$a = C_0 \cdot \dfrac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ $\quad$ cuotas al final de cada periodo
Coste del préstamo	total pagado $= a \cdot n$ · intereses $= a \cdot n - C_0$
Fila del cuadro	intereses $=$ deuda $\times\, i$ · amortización $=$ cuota $-$ intereses · deuda nueva $=$ deuda $-$ amortización

El tipo, siempre en tanto por uno · la potencia, con todos los decimales · tipo y periodos, en la misma unidad de tiempo.