BLOQUE II · MATEMÁTICA FINANCIERA

Unidad 7

Porcentajes e intereses

El índice de variación · porcentajes encadenados · interés simple · interés compuesto · periodos de capitalización · la TAE · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. Una rebaja, una subida de sueldo, el IVA, lo que rinde un depósito y lo que cuesta un préstamo se calculan con la misma operación: multiplicar por un número. Quien entiende ese número compara ofertas de bancos en un minuto y sabe cuánto tendrá dentro de diez años. Toda la unidad cabe en una idea, la de *multiplicar en lugar de sumar*, y en tres fórmulas que salen de ella.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Porcentajes	aplicar aumentos y descuentos con el índice de variación, encadenar varios y recuperar el valor inicial
2. Interés simple	calcular intereses y capital final cuando los intereses no se reinvierten
3. Interés compuesto	calcular el capital final cuando los intereses se suman al capital cada año
4. Capitalización	repetir el cálculo cuando los intereses se abonan cada mes, trimestre o semestre
5. Despejar	hallar el capital inicial, el tipo de interés o el tiempo
6. TAE	convertir un tipo nominal en su tasa anual equivalente y comparar productos

Notación de toda la unidad. C_0 es el capital inicial, C_f el capital final, I los intereses, r el tipo de interés anual *en tanto por uno* (un 3 % se escribe $r = 0{,}03$), t el tiempo en años y k el número de veces al año que se abonan intereses.

1. Teoría

1.1 · Porcentajes: el índice de variación

Subir un precio un 15 % es quedarse con el 100 % que había y añadirle un 15 %: en total, el 115 % del precio, que es multiplicarlo por $1{,}15$. Bajarlo un 15 % es quedarse con el 85 %, que es multiplicarlo por $0{,}85$. Ese número por el que se multiplica se llama índice de variación.

PARA MEMORIZAR

Índice de variación. Número por el que se multiplica una cantidad para aplicarle un porcentaje.

$$\text{aumento del } p\,\% \;\to\; \text{multiplicar por } 1 + \frac{p}{100}$$

$$\text{disminución del } p\,\% \;\to\; \text{multiplicar por } 1 - \frac{p}{100}$$

$$\text{valor final} = \text{valor inicial} \times \text{índice de variación}$$

Ejemplo. Un abrigo de 80 € se rebaja un 15 %. El índice es $1 - 0{,}15 = 0{,}85$ y el precio rebajado es $80 \times 0{,}85 = 68$ €. Si después hay que añadirle a un presupuesto de 100 € el 21 % de IVA, el

índice es $1{,}21$ y el total es $100 \times 1{,}21 = 121$ €.

Leer el índice al revés. Si el índice es mayor que 1 hay aumento y si es menor que 1 hay disminución. El porcentaje se obtiene restando 1 y multiplicando por 100: un índice de $1{,}08$ es una subida del 8 %; uno de $0{,}96$ es una bajada del 4 %, porque $0{,}96 - 1 = -0{,}04$.

Porcentajes encadenados. Cuando se aplican varios porcentajes seguidos, cada uno actúa sobre el resultado del anterior. Los índices se multiplican entre sí y el producto es el índice de variación total.

Ejemplo. Un precio sube un 20 % y después baja un 20 %. Índice total: $1{,}20 \times 0{,}80 = 0{,}96$. El precio final es un 4 % menor que el inicial. La bajada se calcula sobre un precio que ya era más alto y por eso quita más euros de los que añadió la subida.

Recuperar el valor inicial. Si se conoce el valor final, se divide entre el índice: valor inicial = valor final : índice. Una factura de 121 € con el 21 % de IVA incluido tenía una base de $121 : 1{,}21 = 100$ €.



AVISO · LOS PORCENTAJES SEGUIDOS NO SE SUMAN

Subir un 10 % y luego otro 10 % da un índice de $1{,}10 \times 1{,}10 = 1{,}21$, que es un 21 % y no un 20 %. Y para deshacer una rebaja del 30 % hay que dividir entre $0{,}70$; sumarle un 30 % al precio rebajado da un resultado distinto y equivocado.

1.2 · Interés simple

Quien presta dinero cobra por ello un porcentaje del capital por cada año que pasa: es el tipo de interés. En el interés simple los intereses de cada año se calculan siempre sobre el capital inicial, de modo que todos los años se cobra la misma cantidad.

PARA MEMORIZAR

Interés simple. Los intereses no se suman al capital; cada año se generan $C_0 \cdot r$ euros.

$$I = C_0 \cdot r \cdot t \qquad C_f = C_0 + I = C_0\,(1 + r \cdot t)$$

con r en tanto por uno y t en años. Si el tiempo viene en meses, $t = \dfrac{\text{meses}}{12}$; si viene en días, $t = \dfrac{\text{días}}{360}$ (año comercial).

Ejemplo. Se depositan 2.000 € al 3 % de interés simple anual durante 4 años. Cada año rinde $2.000 \times 0{,}03 = 60$ €. En total, $I = 2.000 \times 0{,}03 \times 4 = 240$ € y $C_f = 2.000 + 240 = 2.240$ €.

1.3 · Interés compuesto

En el interés compuesto los intereses de cada año se suman al capital y al año siguiente también producen intereses. Cada año el capital que hay se multiplica por el índice de variación $1 + r$. Es un porcentaje encadenado t veces.

2.000 € al 3 %	hoy	año 1	año 2	año 3	año 4
interés simple	2.000,00	2.060,00	2.120,00	2.180,00	2.240,00
interés compuesto	2.000,00	2.060,00	2.121,80	2.185,45	2.251,02

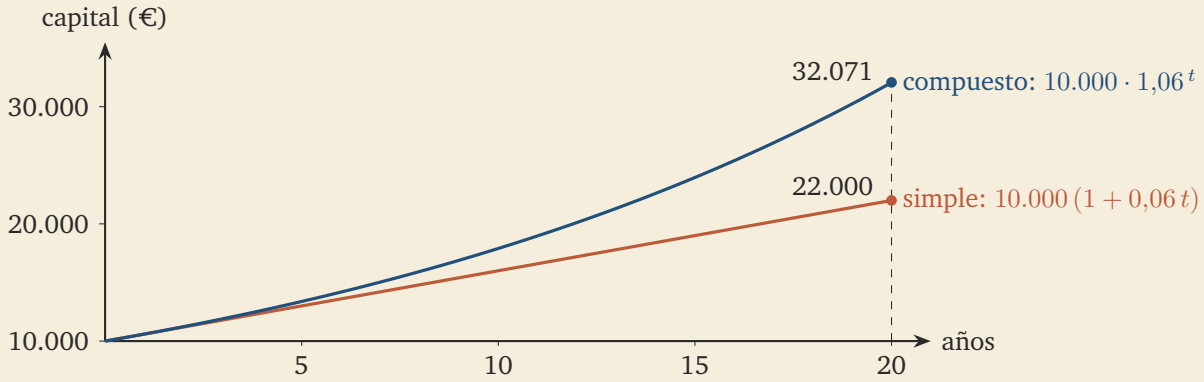
El primer año coinciden. Desde el segundo, el compuesto va por delante, porque los 60 € del primer año ya producen sus propios intereses: $2.060 \times 1{,}03 = 2.121{,}80$ €.

PARA MEMORIZAR

Interés compuesto con abono anual. Los intereses se acumulan al capital al final de cada año.

$$C_f = C_0\,(1+r)^t \qquad I = C_f - C_0$$

Ejemplo. Los 2.000 € al 3 % compuesto durante 4 años se convierten en $C_f = 2.000 \times 1{,}03^4 = 2.000 \times 1{,}125509 = 2.251{,}02$ €. Los intereses son $2.251{,}02 - 2.000 = 251{,}02$ €, es decir, 11,02 € más que con interés simple.



10.000 € al 6 % anual durante 20 años. El interés simple crece en línea recta; el compuesto, en curva cada vez más empinada.



CONEXIÓN · UNA FUNCIÓN LINEAL Y UNA EXPONENCIAL

El capital con interés simple es una función lineal del tiempo, $C(t) = C_0 + C_0\,r\,t$, y su gráfica es una recta. Con interés compuesto es una función exponencial, $C(t) = C_0\,(1+r)^t$, la misma que describe el crecimiento de una población o la subida acumulada de los precios. Las estudiaremos en la unidad 10.

1.4 · Periodos de capitalización

Muchos productos abonan los intereses cada mes o cada trimestre. El tipo anual que anuncia el banco, llamado tipo nominal, se reparte entonces entre los periodos del año, y el capital se multiplica una vez por cada periodo. Si hay k abonos al año, en cada uno se aplica $\frac{r}{k}$, y en t años hay $k \cdot t$ abonos.

PARA MEMORIZAR

Interés compuesto con k periodos de capitalización al año.

$$C_f = C_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k\cdot t}$$

abono	anual	semestral	trimestral	mensual
k	1	2	4	12

Ejemplo. 5.000 € al 6 % nominal con capitalización mensual durante 2 años. Tipo mensual: $0{,}06 : 12 = 0{,}005$. Número de periodos: $12 \times 2 = 24$. Capital final: $C_f = 5.000 \times 1{,}005^{24} = 5.635{,}80$ €. Con abono anual habrían sido $5.000 \times 1{,}06^2 = 5.618$ €. Cuanto más a menudo se abonan los intereses, antes empiezan a producir.



AVISO · DOS CAMBIOS A LA VEZ

Al pasar de años a meses cambian dos números: el tipo se divide entre 12 y el exponente se multiplica por 12. Quien solo cambia uno de los dos obtiene un resultado disparatado. Con $1{,}06^{24}$ los 5.000 € del ejemplo se convertirían en más de 20.000 € en dos años.

1.5 · Despejar el capital, el tipo o el tiempo

En $C_f = C_0\,(1+r)^t$ hay cuatro cantidades. Conocidas tres, la cuarta se despeja.

Se busca	Fórmula despejada	Operación que deshace
capital inicial	$C_0 = \dfrac{C_f}{(1+r)^t}$	la multiplicación se deshace dividiendo
tipo de interés	$r = \sqrt[t]{\dfrac{C_f}{C_0}} - 1$	la potencia de exponente t se deshace con la raíz de índice t
tiempo	$t = \dfrac{\log\,(C_f/C_0)}{\log\,(1+r)}$	la incógnita en el exponente se baja con logaritmos

Ejemplo del tiempo. ¿Cuántos años tardan 2.000 € al 3 % compuesto anual en llegar a 3.000 €? Se plantea $3.000 = 2.000 \times 1{,}03^t$, de donde $1{,}03^t = 1{,}5$. Tomando logaritmos, $t \cdot \log 1{,}03 = \log 1{,}5$ y $t = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}03} = 13{,}72$ años. Como los intereses se abonan al final de cada año, hacen falta 14 años completos.



TRUCO · COMPRUEBA SUSTITUYENDO

Cualquier despeje se comprueba en diez segundos volviendo a la fórmula original. En el ejemplo, $2.000 \times 1{,}03^{13} = 2.937{,}07$ €, que no llega, y $2.000 \times 1{,}03^{14} = 3.025{,}18$ €, que ya supera los 3.000. La respuesta de 14 años es correcta. Sirve cualquier logaritmo, decimal o neperiano, siempre que sea el mismo arriba y abajo.

1.6 · La TAE

Un 6 % nominal con abono mensual rinde en un año algo más que un 6 %, porque los intereses de enero ya producen intereses en febrero. La tasa anual equivalente dice cuánto rinde de verdad: es el tipo que, abonado una sola vez al año, daría el mismo capital final.

PARA MEMORIZAR

Tasa anual equivalente (TAE). Tipo de interés anual que produce, con un único abono al año, el mismo capital que el tipo nominal r con k abonos.

$$\text{TAE} = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1$$

El resultado sale en tanto por uno; se multiplica por 100 para darlo en porcentaje.

Ejemplo. Para un 6 % nominal con capitalización mensual, $\text{TAE} = 1{,}005^{12} - 1 = 1{,}061678 - 1 = 0{,}061678$, un 6,17 %. Con capitalización trimestral sería $1{,}015^4 - 1 = 6{,}14\,\%$ y con abono anual, el mismo 6 %.



CONEXIÓN · POR QUÉ LOS BANCOS ESTÁN OBLIGADOS A PUBLICARLA

Dos bancos pueden anunciar tipos nominales distintos con periodos de abono distintos, y así es imposible saber a simple vista cuál conviene. La TAE pone todas las ofertas en la misma unidad. En España las entidades deben informar de ella en depósitos y préstamos; en los préstamos reales incluye además las comisiones, que aquí no consideramos. En un depósito interesa la TAE más alta y en un préstamo, la más baja.



PARA EL EXAMEN · CÓMO SE REDACTA UN PROBLEMA DE INTERESES

Cuatro líneas en este orden: **datos** con su letra (C_0, r en tanto por uno, k, t), **fórmula** escrita con letras, **sustitución** y **resultado** con dos decimales y el símbolo del euro. Después, una frase que responda a lo que se pregunta. Guarda todos los decimales de la calculadora hasta el final y redondea solo el resultado.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, resultado y conclusión.

RESUELTO 1 · Porcentajes encadenados

Una tienda de informática vende un portátil a 650 €. En septiembre sube el precio un 8 % y en noviembre, durante una campaña de descuentos, lo rebaja un 15 %. a) ¿Cuánto cuesta el portátil en noviembre? b) ¿Qué variación porcentual ha tenido el precio respecto al inicial?

Planteamiento. Cada porcentaje es un índice de variación: subida del 8 % $\to 1{,}08$; rebaja del 15 % $\to 0{,}85$. Los índices se multiplican.
Desarrollo. a) Precio final $= 650 \times 1{,}08 \times 0{,}85 = 702 \times 0{,}85 =$ **596,70 €**.
b) Índice total $= 1{,}08 \times 0{,}85 = 0{,}918$. Como $0{,}918 - 1 = -0{,}082$, la variación es del $\mathbf{-8{,}2}\,\%$.
Comprobación. $650 \times 0{,}918 = 596{,}70$ €.
Conclusión. En noviembre el portátil cuesta 596,70 €, un 8,2 % menos que al principio. La variación total es distinta de $8 - 15 = -7\,\%$ porque la rebaja se aplica sobre el precio ya subido.

RESUELTO 2 · Recuperar el precio inicial

Unas botas cuestan 87,50 € después de aplicarles una rebaja del 30 %. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

Planteamiento. Rebaja del 30 % $\to$ índice $0{,}70$. Se conoce el valor final, así que precio inicial $\times$ $0{,}70 = 87{,}50$.
Desarrollo. precio inicial $= \dfrac{87{,}50}{0{,}70} =$ **125 €**.
Comprobación. $125 \times 0{,}70 = 87{,}50$ €.
Conclusión. Las botas costaban 125 €. Sumar un 30 % a los 87,50 € daría 113,75 €, un precio que al rebajarse un 30 % no devuelve los 87,50.

RESUELTO 3 · Interés simple con el tiempo en meses

Marcos presta 4.500 € a su hermana para la entrada de una furgoneta. Acuerdan un interés simple del 2,4 % anual y la devolución de todo a los 18 meses. ¿Cuánto pagará de intereses y qué cantidad total devolverá?

Planteamiento. $C_0 = 4.500$ €; $r = 0{,}024$; $t = \dfrac{18}{12} = 1{,}5$ años. Interés simple: $I = C_0 \cdot r \cdot t$.
Desarrollo. $I = 4.500 \times 0{,}024 \times 1{,}5 =$ **162 €**. $C_f = 4.500 + 162 =$ **4.662 €**.
Comprobación. Cada año son $4.500 \times 0{,}024 = 108$ €; un año y medio, $108 + 54 = 162$ €.
Conclusión. La hermana de Marcos pagará 162 € de intereses y devolverá 4.662 € en total.

RESUELTO 4 · Interés compuesto con abono anual

Elena ingresa 8.000 € en un depósito que ofrece un 3,5 % de interés compuesto anual. a) ¿Qué capital tendrá dentro de 6 años? b) ¿Cuánto habrá ganado en intereses? c) ¿Cuánto habría ganado con interés simple al mismo tipo?

Planteamiento. $C_0 = 8.000\,€$; $r = 0{,}035$; $t = 6$ años; abono anual. Fórmula: $C_f = C_0\,(1+r)^t$.
Desarrollo. a) $C_f = 8.000 \times 1{,}035^6 = 8.000 \times 1{,}229255 = \mathbf{9.834{,}04\,€}$.
b) $I = 9.834{,}04 - 8.000 = \mathbf{1.834{,}04\,€}$.
c) Con interés simple, $I = 8.000 \times 0{,}035 \times 6 = \mathbf{1.680\,€}$.
Conclusión. Dentro de 6 años Elena tendrá 9.834,04 €, de los que 1.834,04 € son intereses. Son 154,04 € más que con interés simple: es lo que han producido los intereses al quedarse en el depósito.

RESUELTO 5 · Capitalización trimestral

La cooperativa agrícola Valdemora coloca 12.000 € de su fondo de reserva al 4 % nominal anual con capitalización trimestral durante 5 años. a) Calcula el capital final. b) ¿Cuánto más obtiene que si los intereses se abonaran una vez al año?

Planteamiento. $C_0 = 12.000\,€$; $r = 0{,}04$; $k = 4$; $t = 5$. Tipo trimestral: $\dfrac{0{,}04}{4} = 0{,}01$. Número de periodos: $4 \times 5 = 20$. Fórmula: $C_f = C_0\left(1 + \dfrac{r}{k}\right)^{k\,t}$.
Desarrollo. a) $C_f = 12.000 \times 1{,}01^{20} = 12.000 \times 1{,}220190 = \mathbf{14.642{,}28\,€}$.
b) Con abono anual: $12.000 \times 1{,}04^5 = 12.000 \times 1{,}216653 = 14.599{,}83\,€$. Diferencia: $14.642{,}28 - 14.599{,}83 = \mathbf{42{,}45\,€}$.
Conclusión. La cooperativa tendrá 14.642,28 €, que son 42,45 € más que con abono anual. Con el mismo tipo nominal, cuantos más abonos al año, mayor es el capital final.

RESUELTO 6 · Despejar el tiempo y el tipo

a) Julián tiene 5.000 € en una cuenta al 4,5 % de interés compuesto anual. ¿Cuántos años tienen que pasar para que disponga de 7.000 €? b) Un fondo convirtió 10.000 € en 12.762,82 € en 5 años. ¿Qué tipo de interés compuesto anual obtuvo?

a) Planteamiento. $7.000 = 5.000 \times 1{,}045^t$. La incógnita está en el exponente: se despeja con logaritmos.
Desarrollo. $1{,}045^t = \dfrac{7.000}{5.000} = 1{,}4 \;\Rightarrow\; t \cdot \log 1{,}045 = \log 1{,}4 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{\log 1{,}4}{\log 1{,}045} = 7{,}64$ años.
Comprobación. A los 7 años hay $5.000 \times 1{,}045^7 = 6.804{,}31\,€$ y a los 8 años, $5.000 \times 1{,}045^8 = 7.110{,}50\,€$.
Conclusión. Como los intereses se abonan al final de cada año, Julián tendrá que esperar **8 años**.

b) Planteamiento. $12.762{,}82 = 10.000\,(1+r)^5$. La incógnita está en la base: se despeja con una raíz.
Desarrollo. $(1+r)^5 = 1{,}276282 \;\Rightarrow\; 1 + r = \sqrt[5]{1{,}276282} = 1{,}05 \;\Rightarrow\; r = 0{,}05$.
Comprobación. $10.000 \times 1{,}05^5 = 12.762{,}82\,€$.
Conclusión. El fondo rindió un **5 %** compuesto anual.

RESUELTO 7 · Comparar dos depósitos con la TAE

Nuria quiere invertir 10.000 € durante un año y duda entre dos depósitos. El banco A ofrece un 3,60 % nominal anual con abono mensual de intereses. El banco B ofrece un 3,65 % con un único abono al final del año. ¿Cuál le conviene?

Planteamiento. Los dos tipos tienen periodos de abono distintos, así que se comparan sus TAE. Fórmula: $\text{TAE} = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1$.

Desarrollo. Banco A: $r = 0{,}036$, $k = 12$, tipo mensual $0{,}003$. $\text{TAE}_A = 1{,}003^{12} - 1 = 1{,}036600 - 1 = 0{,}0366$, un $\mathbf{3{,}66}\,\%$.

Banco B: con un solo abono al año, la TAE coincide con el tipo nominal, $\mathbf{3{,}65}\,\%$.

Comprobación. En un año, A convierte los 10.000 € en $10.000 \times 1{,}003^{12} = 10.366{,}00$ € y B en $10.000 \times 1{,}0365 = 10.365$ €.

Conclusión. Le conviene el banco A: su TAE es del 3,66 %, mayor que el 3,65 % de B, aunque su tipo nominal sea más bajo. La diferencia es de 1 € al año por cada 10.000 €.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Escribir el tipo en porcentaje dentro de la fórmula: $1 + 3$ en lugar de $1 + 0{,}03$.
- Sumar porcentajes encadenados en lugar de multiplicar sus índices.
- Con capitalización mensual, dividir el tipo entre 12 y olvidar multiplicar el exponente por 12, o al revés.
- Redondear el tipo mensual o la potencia a mitad del cálculo: el error se multiplica por el capital.
- Dar un tiempo con decimales cuando los intereses se abonan al final de cada periodo.
- Entregar el número sin unidad y sin la frase que responde a la pregunta.

3. Ejercicios propuestos

Quince ejercicios en tres niveles. Las soluciones están en el apartado 5; los ejercicios 13 y 15 tienen allí su resolución completa. Trabaja con la calculadora y escribe siempre la fórmula antes de los números.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Escribe el índice de variación y calcula el resultado: a) 240 € aumentan un 12 %; b) 1.500 habitantes disminuyen un 6 %; c) 80 € aumentan un 150 %.

2. Halla la variación porcentual total: a) un precio sube un 10 % y vuelve a subir un 10 %; b) un precio baja un 25 % y después sube un 25 %.

3. Calcula los intereses y el capital final con interés simple: a) 3.000 € al 4 % anual durante 5 años; b) 6.000 € al 2 % anual durante 9 meses.

4. Se ingresan 5.000 € al 2 % de interés compuesto anual durante 3 años. Calcula el capital final y los intereses.

5. Calcula la TAE de un tipo nominal del 4,8 % anual si los intereses se abonan: a) cada mes; b) cada trimestre; c) cada semestre.

NIVEL 2 · APLICAR

6. Tras una subida salarial del 4 %, Inés cobra 1.872 € al mes. ¿Cuánto cobraba antes de la subida?

7. Unas zapatillas se rebajan un 20 % y, en la última semana de rebajas, un 10 % adicional sobre el precio ya rebajado. Ahora cuestan 64,80 €. a) ¿Cuál era el precio inicial? b) ¿Qué descuento total, en porcentaje, se ha aplicado?

8. La panadería Hermanos Robledo pide a un proveedor un aplazamiento de pago de 15.000 € durante 30 meses, con un interés simple del 5 % anual. ¿Cuánto pagará de intereses y qué cantidad total abonará al final?

9. Un depósito de 20.000 € rinde un 3 % nominal anual con capitalización trimestral. Calcula el capital acumulado a los 4 años y los intereses obtenidos.

10. Los padres de Daniel quieren que disponga de 15.000 € dentro de 8 años para sus estudios. ¿Qué cantidad deben ingresar hoy en una cuenta al 4 % de interés compuesto anual?

NIVEL 3 · PENSAR

11. a) ¿Cuántos años tarda en duplicarse un capital colocado al 3,5 % de interés compuesto anual? Fíjate en que el resultado no depende del capital. b) Una regla práctica dice que el tiempo de duplicación se aproxima dividiendo 72 entre el tipo en porcentaje. Compárala con tu resultado.

12. Un capital de 6.000 € se ha convertido en 7.299,92 € al cabo de 5 años con interés compuesto y abono anual. ¿Cuál ha sido el tipo de interés?

13. Tres entidades ofrecen depósitos a un año: A, un 5,9 % nominal con abono mensual; B, un 6 % con abono anual; C, un 5,95 % nominal con abono semestral. Ordénalas de mejor a peor para el ahorrador y justifica la respuesta.

14. Un municipio de 80.000 habitantes pierde cada año el 1,5 % de su población. Si el ritmo se mantiene, ¿cuántos años pasarán hasta que tenga menos de 70.000 habitantes?

15. A Paula le ofrecen colocar sus ahorros al 5 % de interés simple anual o al 4 % de interés compuesto anual. a) ¿Cuál le conviene si va a dejar el dinero 5 años? b) ¿A partir de qué año completo el interés compuesto supera al simple? c) Explica por qué la respuesta no depende de la cantidad ahorrada.

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · Los 12.000 euros de Clara

Clara ha recibido 12.000 € de una herencia y quiere guardarlos tres años, hasta terminar la carrera. Su banco le propone dos productos:

- **Producto A**: un 3,2 % de interés simple anual; los intereses se abonan todos juntos al final.
- **Producto B**: un 3 % nominal anual con capitalización mensual.

a) Calcula el capital final con cada producto e indica cuál le conviene a tres años.
b) Calcula la TAE del producto B. ¿Por qué, siendo compuesto, rinde menos que A en este plazo?
c) Si Clara eligiera B y no tocara el dinero, ¿cuántos meses tardaría en reunir 15.000 €?
d) Durante esos tres años los precios suben un 2,5 % anual. ¿Cuánto valen, en euros de hoy, los 13.128,62 € que tendría con B? ¿Ha ganado poder de compra?

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. a) índice $1{,}12$; 268,80 €. b) índice $0{,}94$; 1.410 habitantes. c) índice $2{,}5$; 200 €.
2. a) $1{,}10 \times 1{,}10 = 1{,}21$: sube un 21 %. b) $0{,}75 \times 1{,}25 = 0{,}9375$: baja un 6,25 %.
3. a) $I = 600$ €; $C_f = 3.600$ €. b) $t = 0{,}75$ años; $I = 90$ €; $C_f = 6.090$ €.
4. $C_f = 5.000 \times 1{,}02^3 = 5.306{,}04$ €; $I = 306{,}04$ €.
5. a) $1{,}004^{12} - 1 = 4{,}91\,\%$. b) $1{,}012^4 - 1 = 4{,}89\,\%$. c) $1{,}024^2 - 1 = 4{,}86\,\%$.
6. $1.872 : 1{,}04 = 1.800$ €.
7. a) Índice total $0{,}80 \times 0{,}90 = 0{,}72$; precio inicial $64{,}80 : 0{,}72 = 90$ €. b) Descuento total del 28 %.
8. $t = 2{,}5$ años; $I = 15.000 \times 0{,}05 \times 2{,}5 = 1.875$ €; total, 16.875 €.
9. $C_f = 20.000 \times 1{,}0075^{16} = 22.539{,}84$ €; $I = 2.539{,}84$ €.
10. $C_0 = 15.000 : 1{,}04^8 = 15.000 : 1{,}368569 = 10.960{,}35$ €.
11. a) $1{,}035^t = 2 \Rightarrow t = \log 2 : \log 1{,}035 = 20{,}15$; hacen falta 21 años completos (a los 20 años el capital se ha multiplicado por $1{,}9898$ y a los 21, por $2{,}0594$). b) $72 : 3{,}5 = 20{,}6$ años: la regla se desvía menos de medio año.
12. $(1+r)^5 = 7.299{,}92 : 6.000 = 1{,}216653 \Rightarrow 1 + r = \sqrt[5]{1{,}216653} = 1{,}04$; $r = 4\,\%$.
13. A, C, B (resolución completa a continuación).
14. $0{,}985^t = 70.000 : 80.000 = 0{,}875 \Rightarrow t = \log 0{,}875 : \log 0{,}985 = 8{,}84$; pasarán 9 años (a los 8 años quedan 70.889 habitantes y a los 9, 69.826).
15. a) el simple; b) a partir del año 12; c) el capital se simplifica (resolución completa a continuación).

Resolución completa del ejercicio 13

Planteamiento. Los tres tipos tienen periodos de abono distintos. Se calcula la TAE de cada uno con $\text{TAE} = \left(1 + \dfrac{r}{k}\right)^k - 1$ y se ordenan de mayor a menor.

Desarrollo. Entidad A: $k = 12$; tipo mensual $\dfrac{0{,}059}{12} = 0{,}0049167$; $\text{TAE}_A = 1{,}0049167^{12} - 1 = 0{,}060622$, un $6{,}06\,\%$.

Entidad B: un solo abono al año; $\text{TAE}_B = 6{,}00\,\%$.

Entidad C: $k = 2$; tipo semestral $\dfrac{0{,}0595}{2} = 0{,}02975$; $\text{TAE}_C = 1{,}02975^2 - 1 = 0{,}060385$, un $6{,}04\,\%$.

Resultado. $\text{TAE}_A = 6{,}06\,\% > \text{TAE}_C = 6{,}04\,\% > \text{TAE}_B = 6{,}00\,\%$.

Conclusión. El mejor depósito es el de A, después el de C y por último el de B. La entidad con el tipo nominal más alto es la que menos rinde, porque abona los intereses una sola vez. Para dividir $0{,}059$ entre 12 conviene dejar el resultado en la calculadora con todos sus decimales.

Resolución completa del ejercicio 15

Planteamiento. Con un capital C_0 cualquiera, a los t años el interés simple da $C_0\,(1 + 0{,}05\,t)$ y el compuesto $C_0 \cdot 1{,}04^t$. Al comparar, C_0 aparece multiplicando en los dos lados y se simplifica: basta comparar $1 + 0{,}05\,t$ con $1{,}04^t$.

Desarrollo. a) Para $t = 5$: simple, $1 + 0{,}05 \times 5 = 1{,}25$; compuesto, $1{,}04^5 = 1{,}2167$. Conviene el simple.

b) La ecuación $1{,}04^t = 1 + 0{,}05\,t$ tiene la incógnita a la vez en un exponente y fuera de él, y no se puede despejar. Se resuelve por tanteo con una tabla:

año t	5	10	11	12	13
simple: $1 + 0{,}05\,t$	1,2500	1,5000	1,5500	1,6000	1,6500
compuesto: $1{,}04^t$	1,2167	1,4802	1,5395	1,6010	1,6651

Hasta el año 11 va por delante el simple. En el año 12 el compuesto lo supera por primera vez.

Resultado. a) Interés simple al 5 %. b) A partir del año 12.
Conclusión. c) Si Paula va a retirar el dinero antes de 12 años le conviene el 5 % simple; si lo va a dejar 12 años o más, el 4 % compuesto. La respuesta vale para cualquier cantidad, porque el capital multiplica a las dos expresiones. Con 1.000 €, en el año 12 tendría 1.600 € con el simple y 1.601,03 € con el compuesto.

Ejercicio de síntesis

a) Producto A: $C_f = 12.000\,(1 + 0{,}032 \times 3) = 12.000 \times 1{,}096 = \mathbf{13.152}$ €.
Producto B: tipo mensual $0{,}03 : 12 = 0{,}0025$; periodos $12 \times 3 = 36$; $C_f = 12.000 \times 1{,}0025^{36} = 12.000 \times 1{,}094051 = \mathbf{13.128{,}62}$ €. A tres años le conviene **A**, que da 23,38 € más.
b) $\text{TAE}_B = 1{,}0025^{12} - 1 = 0{,}030416$, un $\mathbf{3{,}04}\,\%$. El producto B reinvierte los intereses, pero parte de un tipo más bajo, y en solo tres años la reinversión no llega a compensar las dos décimas de diferencia. Con plazos largos el compuesto acabaría por delante.
c) $15.000 = 12.000 \times 1{,}0025^n \Rightarrow 1{,}0025^n = 1{,}25 \Rightarrow n = \dfrac{\log 1{,}25}{\log 1{,}0025} = 89{,}37$ meses. Hacen falta **90 meses**, que son 7 años y medio. Comprobación: $12.000 \times 1{,}0025^{89} = 14.986{,}19$ € y $12.000 \times 1{,}0025^{90} = 15.023{,}65$ €.
d) Los precios se multiplican por $1{,}025^3 = 1{,}076891$. En euros de hoy, $13.128{,}62 : 1{,}076891 = \mathbf{12.191{,}23}$ €. Clara ha ganado poder de compra, aunque poco: de los 1.128,62 € de intereses, solo 191,23 € son ganancia real. El resto compensa la subida de los precios.

6. Compruebo que sé…

- ☐ Escribir el índice de variación de cualquier aumento o disminución porcentual.
- ☐ Encadenar varios porcentajes multiplicando sus índices y leer la variación total.
- ☐ Recuperar el valor inicial dividiendo entre el índice.
- ☐ Calcular intereses y capital final con interés simple, con el tiempo en años, meses o días.
- ☐ Calcular el capital final con interés compuesto y abono anual.
- ☐ Adaptar la fórmula a abonos mensuales, trimestrales o semestrales cambiando el tipo y el exponente.
- ☐ Despejar el capital inicial, el tipo (con una raíz) y el tiempo (con logaritmos), y comprobar el resultado.
- ☐ Calcular una TAE y usarla para decidir entre dos productos.
- ☐ Redactar la solución con datos, fórmula, sustitución, resultado con unidad y frase de conclusión.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 7 · TODO EN MEDIA CARA

Índice de variación	$1 \pm \dfrac{p}{100}$	valor final = valor inicial × índice
Porcentajes encadenados	$i_1 \cdot i_2 \cdots i_n$	los índices se multiplican
Valor inicial	$\dfrac{\text{valor final}}{\text{índice}}$	se divide; no se aplica el porcentaje contrario
Interés simple	$I = C_0 \cdot r \cdot t$	$C_f = C_0\,(1 + r\,t)$
Interés compuesto anual	$C_f = C_0\,(1+r)^t$	$I = C_f - C_0$
Con k abonos al año	$C_f = C_0\left(1 + \dfrac{r}{k}\right)^{k\,t}$	$k = 12$ mensual, 4 trimestral, 2 semestral
Capital inicial	$C_0 = \dfrac{C_f}{(1+r)^t}$	
Tipo de interés	$r = \sqrt[t]{\dfrac{C_f}{C_0}} - 1$	
Tiempo	$t = \dfrac{\log\,(C_f/C_0)}{\log\,(1+r)}$	se redondea hacia arriba a periodos completos
TAE	$\left(1 + \dfrac{r}{k}\right)^k - 1$	en depósitos, la más alta; en préstamos, la más baja

r siempre en tanto por uno · t en años · redondea solo el resultado final, a céntimos.