BLOQUE I · NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Unidad 6

Inecuaciones

Desigualdades e intervalos · inecuaciones de primer y segundo grado · la tabla de signos · inecuaciones con fracciones · semiplanos · sistemas con dos incógnitas y región solución · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. Una empresa rara vez busca un valor exacto. Quiere saber entre qué precios gana dinero, a partir de cuántas unidades cubre gastos o qué combinaciones de dos productos caben en las horas disponibles. La respuesta a esas preguntas es un intervalo o una región del plano, y se obtiene con una inecuación. En segundo de Bachillerato, la región solución de un sistema de inecuaciones es el punto de partida de la programación lineal, un problema fijo de la PAU.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Desigualdades e intervalos	pasar de una desigualdad a un intervalo y a su dibujo en la recta
2. Primer grado	resolver una inecuación cambiando el sentido cuando toca
3. Sistemas con una incógnita	hallar los valores que cumplen dos inecuaciones a la vez
4. Segundo grado	resolver con raíces y tabla de signos
5. Con fracciones	estudiar el signo de un cociente
6. Dos incógnitas	representar un semiplano y decidir qué lado es la solución
7. Sistemas con dos incógnitas	dibujar la región solución y calcular sus vértices

1. Teoría

1.1 · Desigualdades e intervalos

PARA MEMORIZAR

Inecuación: desigualdad con una incógnita, escrita con $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$. Su **solución** es el conjunto de todos los números que la cumplen, y casi siempre es un intervalo. **Reglas para transformarla:**

- Sumar o restar el mismo número a los dos miembros conserva el sentido de la desigualdad.
- Multiplicar o dividir los dos miembros por un número **positivo** conserva el sentido.
- Multiplicar o dividir los dos miembros por un número **negativo cambia el sentido**.

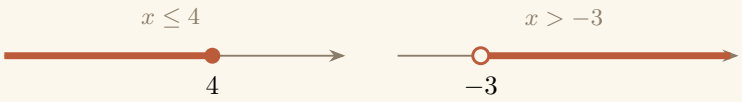
Desigualdad	Intervalo	En la recta
$2 < x < 5$	$(2,\ 5)$	extremos fuera: dos puntos huecos
$2 \leq x \leq 5$	$[2,\ 5]$	extremos dentro: dos puntos rellenos
$2 < x \leq 5$	$(2,\ 5]$	hueco en 2 y relleno en 5
$x \geq 2$	$[2,\ +\infty)$	relleno en 2 y semirrecta hacia la derecha
$x < 5$	$(-\infty,\ 5)$	hueco en 5 y semirrecta hacia la izquierda

El corchete indica que el extremo pertenece a la solución. El infinito no es un número y no se alcanza: va siempre con paréntesis.

1.2 · Inecuaciones de primer grado

Se resuelven como una ecuación de primer grado, con una vigilancia añadida: el signo del número por el que se divide al final.

Ejemplo 1. $3x - 5 \leq 7 \Rightarrow 3x \leq 12 \Rightarrow x \leq 4$. Se ha dividido entre 3, positivo, y el sentido se conserva. Solución: $(-\infty,\ 4]$.
Ejemplo 2. $-2x + 1 < 7 \Rightarrow -2x < 6 \Rightarrow x > -3$. Se ha dividido entre -2, negativo, y el sentido cambia. Solución: $(-3,\ +\infty)$.





TRUCO · COMPRUEBA CON UN NÚMERO

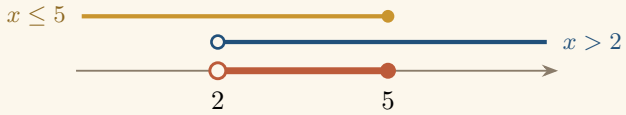
Elige un número de tu solución y sustitúyelo en la inecuación del enunciado. En el ejemplo 2, con $x = 0$: $-2 \cdot 0 + 1 = 1 < 7$, cierto. Si hubieras olvidado cambiar el sentido, tu solución sería $x < -3$ y el 0 quedaría fuera. Diez segundos que detectan el error más frecuente de la unidad.

1.3 · Sistemas de inecuaciones con una incógnita

PARA MEMORIZAR

Un **sistema de inecuaciones** pide los números que cumplen todas a la vez. Se resuelve cada inecuación por separado y se toma la **intersección**: la parte de la recta que queda marcada en todas.

Ejemplo. $\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 4 \leq 9 \end{cases}$ La primera da $x > 2$ y la segunda, $x \leq 5$.



Las dos líneas coinciden entre 2 y 5. Solución: $(2,\ 5]$.

1.4 · Inecuaciones de segundo grado

En una inecuación como $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ no se puede despejar la x. Se cambia de pregunta: ¿en qué zonas de la recta es negativo el polinomio? Un polinomio solo puede cambiar de signo al pasar por una raíz, así que entre dos raíces seguidas mantiene siempre el mismo signo.

PARA MEMORIZAR

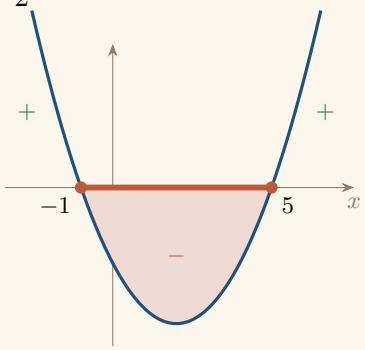
Método de la tabla de signos

1. Pasar todo a un miembro para comparar con 0.
2. Hallar las raíces del polinomio.
3. Las raíces dividen la recta en zonas. Elegir un número de cada zona y calcular el signo del polinomio en él.
4. Quedarse con las zonas del signo pedido. Los extremos se incluyen si la desigualdad lleva el igual ($\leq$, $\geq$) y se excluyen si no lo lleva ($<$, $>$).

Ejemplo. $x^2 - 4x - 5 \leq 0$. Raíces: $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2}$, es decir, $x = -1$ y $x = 5$.

Zona	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, +\infty)$
Número de prueba	-2	0	6
Valor de $x^2 - 4x - 5$	7	-5	7
Signo	$+$	$-$	$+$

Se pide «menor o igual que 0»: la zona negativa, con los extremos. Solución: $[-1,\ 5]$.



La parábola lo confirma: queda por debajo del eje entre sus dos cortes.



AVISO · CUANDO NO HAY DOS RAÍCES

Si el polinomio **no tiene raíces**, no cambia nunca de signo: basta probar un número. Por ejemplo, $x^2 + 1$ vale 1 en $x = 0$, luego es siempre positivo; $x^2 + 1 > 0$ se cumple para todo número real y $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución. Si tiene **una raíz doble**, como $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, el polinomio es positivo a los dos lados y vale 0 solo en la raíz.

1.5 · Inecuaciones con fracciones

PARA MEMORIZAR

En $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ se estudia el signo de un cociente. Los puntos que dividen la recta son las **raíces del numerador** y las **raíces del denominador**. En cada zona se halla el signo de arriba y el de abajo, y se aplica la regla de los signos. **Las raíces del denominador nunca entran en la solución**, porque en ellas no se puede dividir.

Ejemplo. $\dfrac{x-2}{x+1} \geq 0$. El numerador se anula en $x = 2$ y el denominador, en $x = -1$.

Zona	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $x - 2$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x + 1$	$-$	$+$	$+$
Signo del cociente	$+$	$-$	$+$

Se piden las zonas positivas, y el cociente vale 0 en $x = 2$, que se incluye. El -1 queda fuera. Solución: $(-\infty,\ -1) \cup [2,\ +\infty)$.



AVISO · NO MULTIPLIQUES EN CRUZ

Ante $\dfrac{x-2}{x+1} \geq 0$ tienta pasar el denominador multiplicando. No se puede: $x + 1$ es positivo para unos valores de x y negativo para otros, y no sabrías si cambiar el sentido. Si en el otro miembro hay un número distinto de 0, pásalo restando, opera hasta tener una sola fracción y haz la tabla.

1.6 · Inecuaciones lineales con dos incógnitas

La ecuación $2x + y = 8$ es una recta. La inecuación $2x + y \leq 8$ la cumplen todos los puntos de uno de los dos lados de esa recta: un **semiplano**.

PARA MEMORIZAR

Para representar $ax + by \leq c$

1. Dibujar la recta $ax + by = c$ con dos puntos, por ejemplo sus cortes con los ejes.
2. Elegir un **punto de prueba** que no esté en la recta. El más cómodo es $(0, 0)$.
3. Sustituirlo en la inecuación. Si la cumple, la solución es el lado donde está ese punto; si no la cumple, el otro lado.

Con $\leq$ o $\geq$ la recta forma parte de la solución y se dibuja continua. Con $<$ o $>$ no forma parte y se dibuja discontinua.

1.7 · Sistemas con dos incógnitas: la región solución

PARA MEMORIZAR

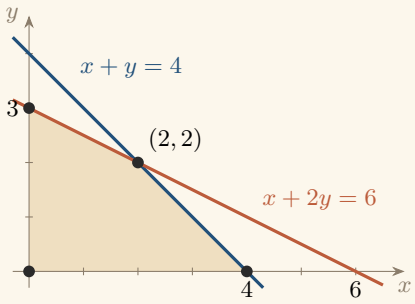
La solución de un sistema de inecuaciones con dos incógnitas es la zona del plano que pertenece a todos los semiplanos a la vez: la **región solución**, también llamada **región factible**. Sus esquinas son los **vértices**. Cada vértice es el corte de dos de las rectas y se calcula resolviendo el sistema que forman.

Ejemplo. $x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x + y \leq 4,\ \ x + 2y \leq 6$.

Las dos primeras condiciones dejan el primer cuadrante. La recta $x + y = 4$ pasa por $(4, 0)$ y $(0, 4)$; la recta $x + 2y = 6$, por $(6, 0)$ y $(0, 3)$. El punto $(0, 0)$ cumple las dos inecuaciones, así que en ambas vale el lado del origen.

Vértice donde se cortan las dos rectas: restando las ecuaciones, $y = 2$, y entonces $x = 2$.

Vértices de la región: $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 2)$ y $(0, 3)$.





CONEXIÓN · LO QUE HARÁS CON ESTO EN SEGUNDO

En programación lineal se busca el punto de la región factible que da el mayor beneficio o el menor coste. Ese punto está siempre en un vértice. Por eso en esta unidad se insiste en dibujar bien la región y en calcular todos sus vértices: el curso que viene solo habrá que añadir una función y evaluarla en ellos.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, comprobación y conclusión.

RESUELTO 1 · Primer grado con paréntesis

Resuelve $5 - 2(x - 1) \geq 3x - 8$ y representa la solución.

Planteamiento. Se quita el paréntesis, se agrupan las x en un miembro y los números en el otro.
Desarrollo. $5 - 2x + 2 \geq 3x - 8 \Rightarrow 7 - 2x \geq 3x - 8 \Rightarrow -5x \geq -15$. Se divide entre -5, negativo, y cambia el sentido: $x \leq 3$.
Comprobación. Con $x = 0$: $5 - 2 \cdot (-1) = 7$ y $3 \cdot 0 - 8 = -8$; $7 \geq -8$, cierto.
Conclusión. Solución: $(-\infty,\ \mathbf{3}]$.



RESUELTO 2 · Sistema con una incógnita

Resuelve $\begin{cases} 3x - 2 < 10 \\ 2x + 5 \geq 1 \end{cases}$

Desarrollo. Primera: $3x < 12 \Rightarrow x < 4$. Segunda: $2x \geq -4 \Rightarrow x \geq -2$. Las dos a la vez: $-2 \leq x < 4$.
Comprobación. Con $x = 0$: $-2 < 10$ y $5 \geq 1$, ciertas las dos. Con $x = 5$, fuera de la solución: $13 < 10$ es falso.
Conclusión. Solución: $[\mathbf{-2},\ \mathbf{4})$. El -2 entra porque su desigualdad lleva el igual; el 4 no entra.

RESUELTO 3 · Segundo grado

Resuelve $x^2 - 2x - 8 > 0$.

Planteamiento. Ya está comparada con 0. Se buscan las raíces y se hace la tabla de signos.
Desarrollo. $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2}$, es decir, $x = -2$ y $x = 4$.

Zona	$(-\infty, -2)$	$(-2, 4)$	$(4, +\infty)$
Número de prueba	-3	0	5
Valor de $x^2 - 2x - 8$	7	-8	7
Signo	$+$	$-$	$+$

Conclusión. Se pide «mayor que 0»: las dos zonas positivas, sin los extremos. Solución: $(-\infty,\ \mathbf{-2}) \cup (\mathbf{4},\ +\infty)$.

RESUELTO 4 · ¿Con cuántas unidades hay beneficio?

El beneficio mensual de Bicicletas Aneto, en miles de euros, es $B(x) = -x^2 + 10x - 16$, donde x son los miles de bicicletas vendidas. ¿Para qué ventas obtiene beneficio la empresa?

Planteamiento. Hay beneficio cuando $B(x) > 0$: $-x^2 + 10x - 16 > 0$. Conviene multiplicar por -1 para que el coeficiente de x^2 sea positivo, y eso cambia el sentido: $x^2 - 10x + 16 < 0$.

Desarrollo. Raíces: $x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \dfrac{10 \pm 6}{2}$, es decir, $x = 2$ y $x = 8$.

Zona	$(-\infty, 2)$	$(2, 8)$	$(8, +\infty)$
Número de prueba	0	5	10
Valor de $x^2 - 10x + 16$	16	-9	16
Signo	$+$	$-$	$+$

Se busca la zona negativa: $(2,\ 8)$.

Comprobación. En la función original, $B(5) = -25+50-16 = 9 > 0$ y $B(1) = -1+10-16 = -7 < 0$.

Conclusión. La empresa gana dinero si vende **entre 2.000 y 8.000 bicicletas al mes**. Con 2.000 o con 8.000 justas, el beneficio es cero.

RESUELTO 5 · Inecuación con fracción

Resuelve $\dfrac{x+3}{x-2} \leq 0$.

Planteamiento. El numerador se anula en $x = -3$ y el denominador, en $x = 2$. Esos dos números dividen la recta en tres zonas.

Desarrollo.

Zona	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $x + 3$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 2$	$-$	$-$	$+$
Signo del cociente	$+$	$-$	$+$

Se pide «menor o igual que 0»: la zona negativa. En $x = -3$ el cociente vale 0 y se incluye. En $x = 2$ el cociente no existe y se excluye.

Comprobación. Con $x = 0$: $\dfrac{3}{-2} = -1{,}5 \leq 0$, cierto.

Conclusión. Solución: $[\mathbf{-3},\ \mathbf{2})$.

RESUELTO 6 · Un semiplano

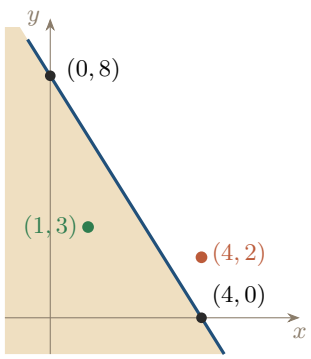
Representa la solución de $2x + y \leq 8$ y di si los puntos $(1, 3)$ y $(4, 2)$ pertenecen a ella.

Desarrollo. Recta $2x + y = 8$: si $x = 0$, $y = 8$; si $y = 0$, $x = 4$. Pasa por $(0, 8)$ y $(4, 0)$, y se dibuja continua porque la desigualdad lleva el igual.

Punto de prueba $(0, 0)$: $2 \cdot 0 + 0 = 0 \leq 8$, cierto. La solución es el lado de la recta que contiene al origen.

Comprobación de los puntos. $(1, 3)$: $2 + 3 = 5 \leq 8$, pertenece. $(4, 2)$: $8 + 2 = 10$, que no es menor o igual que 8; no pertenece.

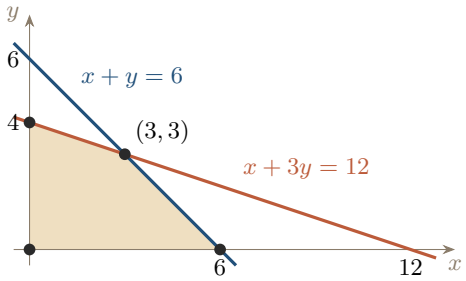
Conclusión. La solución es el **semiplano situado por debajo de la recta**, con la recta incluida.



RESUELTO 7 · Región solución y vértices

Representa la región solución del sistema y calcula sus vértices: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$, $x + 3y \leq 12$.

Planteamiento. $x \geq 0$ e $y \geq 0$ limitan la región al primer cuadrante. Faltan dos rectas.
Desarrollo. $x+y=6$ pasa por $(6,0)$ y $(0,6)$. $x+3y=12$ pasa por $(12,0)$ y $(0,4)$. El punto $(0,0)$ cumple las dos inecuaciones: vale en ambas el lado del origen. Corte de las dos rectas: restando, $2y = 6 \Rightarrow y = 3$, y entonces $x = 3$.
Comprobación. $(3,3)$: $3 + 3 = 6$ y $3 + 9 = 12$. Está en las dos rectas.
Conclusión. La región es un cuadrilátero de vértices $(\mathbf{0},\mathbf{0})$, $(\mathbf{6},\mathbf{0})$, $(\mathbf{3},\mathbf{3})$ y $(\mathbf{0},\mathbf{4})$.



Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Dividir entre un número negativo y dejar el sentido de la desigualdad como estaba.
- En segundo grado, dar las raíces como solución. Las raíces son las fronteras; la solución es un intervalo.
- Escribir $x > \pm 3$ para resolver $x^2 > 9$. Hay que hacer la tabla de signos.
- Poner corchete en un extremo que no entra, o en el infinito.
- Incluir en la solución una raíz del denominador.
- Pasar multiplicando un denominador que lleva x.
- Sombrear el semiplano sin haber probado ningún punto.
- Leer los vértices «a ojo» en el dibujo en lugar de calcularlos con un sistema.

3. Ejercicios propuestos

Quince ejercicios en tres niveles. Las soluciones están en el apartado 5; los ejercicios 13 y 14 tienen allí su resolución completa.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Resuelve y escribe la solución como intervalo: a) $2x + 3 > 11$ b) $4 - 3x \leq 10$ c) $\dfrac{x-1}{2} < x + 3$

2. Resuelve: a) $\begin{cases} x + 3 > 1 \\ 2x \leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 1 \geq 5 \\ x < 1 \end{cases}$

3. Resuelve: a) $x^2 - 9 < 0$ b) $x^2 - 3x \geq 0$ c) $x^2 - 7x + 10 \leq 0$

4. Decide si los puntos $(0,0)$, $(4,1)$ y $(2,0)$ son soluciones de $3x - 2y < 6$.

5. Representa en el plano la solución de $x + y \geq 4$.

NIVEL 2 · APLICAR

6. Resuelve: a) $-x^2 + 4x + 5 > 0$ b) $2x^2 + x - 3 \geq 0$

7. Resuelve: a) $x^2 + 2x + 5 > 0$ b) $x^2 - 4x + 4 > 0$ c) $x^2 + 1 \leq 0$

8. Resuelve: a) $\dfrac{x-1}{x+4} > 0$ b) $\dfrac{2x-6}{x+1} \leq 0$

9. Representa la región solución y calcula sus vértices: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 5,\ y \leq 3$.

10. La tarifa Mínima de una compañía de telefonía cuesta 15 € al mes más 0,05 € por minuto de llamada. La tarifa Plana cuesta 25 € al mes con llamadas ilimitadas. ¿A partir de cuántos minutos al mes sale más cara la tarifa Mínima?

NIVEL 3 · PENSAR

11. Resuelve $x^3 - 4x \geq 0$. (Factoriza el polinomio y haz una tabla con cuatro zonas.)

12. Una editorial calcula que, si pone un libro a p euros, vende $120 - 2p$ ejemplares a la semana. ¿Entre qué precios consigue unos ingresos semanales de al menos 1.600 €?

13. El taller Cueros Albarracín fabrica bolsos y carteras. Cada bolso necesita 2 horas de corte y 1 hora de cosido; cada cartera, 1 hora de corte y 2 horas de cosido. Cada día dispone de 10 horas de corte y 8 horas de cosido.
a) Plantea el sistema de inecuaciones, llamando x al número de bolsos e y al de carteras.
b) Representa la región solución y calcula sus vértices.
c) ¿Puede fabricar en un día 3 bolsos y 3 carteras?

14. Resuelve $\dfrac{x^2 - 4}{x - 1} \leq 0$.

15. ¿Para qué valores de k la ecuación $x^2 + kx + 9 = 0$ no tiene solución real?

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · Las cuentas de la Quesería Valdeón

La Quesería Valdeón elabora queso curado. Cada semana tiene 400 € de gastos fijos, y cada queso le cuesta 6 € de leche y energía. Vende cada queso a 10 €.

a) ¿A partir de cuántos quesos semanales los ingresos superan a los costes?

b) El coste medio por queso al fabricar x quesos es $\dfrac{400+6x}{x}$. ¿Cuántos quesos debe fabricar para que el coste medio no pase de 8 €?

c) Un estudio estima que, si vende el queso a p euros, su beneficio semanal en cientos de euros será $B(p) = -p^2 + 26p - 120$. ¿Entre qué precios obtiene beneficio?

d) La quesería decide elaborar también queso fresco. Cada queso curado necesita 2 litros de leche de oveja y 2 de cabra; cada queso fresco, 1 litro de oveja y 3 de cabra. Dispone cada semana de 200 litros de leche de oveja y 300 de cabra. Llama x a los quesos curados e y a los frescos, plantea el sistema, representa la región solución y calcula sus vértices.

e) ¿Puede elaborar en una semana 80 quesos curados y 50 frescos?

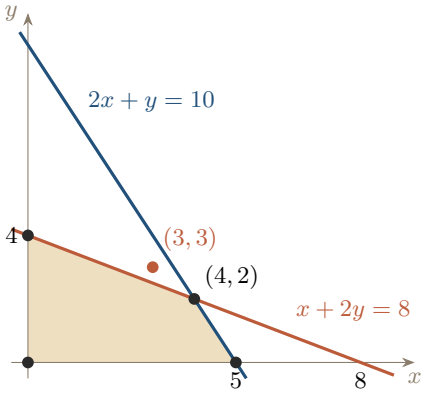
5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. a) $x > 4$: $(4,\ +\infty)$; b) $-3x \le 6 \Rightarrow x \ge -2$: $[-2,\ +\infty)$; c) $x - 1 < 2x + 6 \Rightarrow x > -7$: $(-7,\ +\infty)$.
2. a) $x > -2$ y $x \le 4$: $(-2,\ 4]$; b) $x \ge 2$ y $x < 1$ no se cumplen a la vez: sin solución.
3. a) $(-3,\ 3)$; b) $(-\infty,\ 0] \cup [3,\ +\infty)$; c) $[2,\ 5]$.
4. $(0,0)$: $0 < 6$, sí. $(4,1)$: $12 - 2 = 10$, no. $(2,0)$: $6 < 6$ es falso, no; el punto está en la recta y la desigualdad es estricta.
5. Recta por $(4,0)$ y $(0,4)$, continua. El punto $(0,0)$ no cumple $0 \ge 4$: la solución es el semiplano que no contiene al origen, por encima de la recta.
6. a) $x^2 - 4x - 5 < 0$, raíces -1 y 5: $(-1,\ 5)$; b) raíces $-\frac{3}{2}$ y 1: $\left(-\infty,\ -\frac{3}{2}\right] \cup [1,\ +\infty)$.
7. a) Sin raíces y positivo en $x = 0$: todo $\mathbb{R}$; b) $(x-2)^2 > 0$: todo $\mathbb{R}$ menos $x = 2$, es decir, $(-\infty,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$; c) sin solución.
8. a) $(-\infty,\ -4) \cup (1,\ +\infty)$; b) $(-1,\ 3]$.
9. Vértices $(0,0)$, $(5,0)$, $(2,3)$ y $(0,3)$. El vértice $(2,3)$ sale de $y = 3$ en $x + y = 5$.
10. $15 + 0{,}05x > 25 \Rightarrow 0{,}05x > 10 \Rightarrow x > 200$. A partir de 200 minutos al mes.
11. $x(x-2)(x+2) \ge 0$, raíces -2, 0 y 2. Signos por zonas: $-$, $+$, $-$, $+$. Solución: $[-2,\ 0] \cup [2,\ +\infty)$.
12. $p\,(120 - 2p) \ge 1.600 \Rightarrow p^2 - 60p + 800 \le 0$, raíces 20 y 40. Entre 20 € y 40 €, ambos incluidos.
13. Vértices $(0,0)$, $(5,0)$, $(4,2)$ y $(0,4)$; no puede fabricar 3 y 3 (resolución completa a continuación).
14. $(-\infty,\ -2] \cup (1,\ 2]$ (resolución completa a continuación).
15. No hay solución real si el discriminante es negativo: $k^2 - 36 < 0$, es decir, $k \in (-6,\ 6)$.

Resolución completa del ejercicio 13

a) Planteamiento. Horas de corte: $2x + y \leq 10$. Horas de cosido: $x + 2y \leq 8$. Además, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, porque no se fabrican cantidades negativas.
b) Desarrollo. $2x + y = 10$ pasa por $(5, 0)$ y $(0, 10)$. $x + 2y = 8$ pasa por $(8, 0)$ y $(0, 4)$. El origen cumple las dos inecuaciones.
Corte de las rectas: de la primera, $y = 10 - 2x$. En la segunda: $x + 20 - 4x = 8 \Rightarrow x = 4$, $y = 2$.
Vértices: $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{5}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{4}, \mathbf{2})$ y $(\mathbf{0}, \mathbf{4})$.



c) Punto $(3, 3)$. Corte: $2 \cdot 3 + 3 = 9 \leq 10$, se cumple. Cosido: $3 + 2 \cdot 3 = 9$, que supera las 8 horas.
Conclusión. No puede: le faltaría una hora de cosido. El punto $(3, 3)$ queda fuera de la región, por encima de la recta del cosido.

Resolución completa del ejercicio 14

Planteamiento. El numerador se factoriza: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, con raíces -2 y 2. El denominador se anula en $x = 1$. Tres puntos y cuatro zonas.
Desarrollo.

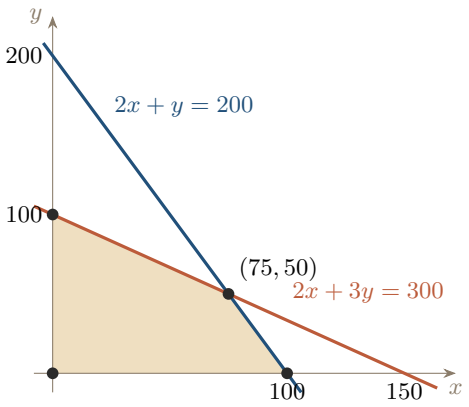
Zona	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
Número de prueba	-3	0	$1{,}5$	3
Signo de $x^2 - 4$	$+$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo del cociente	$-$	$+$	$-$	$+$

Se piden las zonas negativas: la primera y la tercera. El cociente vale 0 en $x = -2$ y en $x = 2$, que se incluyen. En $x = 1$ no existe y se excluye.
Comprobación. Con $x = -3$: $\dfrac{9 - 4}{-4} = -1{,}25 \leq 0$. Con $x = 0$, que queda fuera: $\dfrac{-4}{-1} = 4$, positivo.
Resultado. $(-\infty, \ \mathbf{-2}] \cup (\mathbf{1}, \ \mathbf{2}]$.
Conclusión. En una inecuación con fracción, los extremos no se tratan todos igual: las raíces del numerador siguen al signo de la desigualdad y las del denominador quedan siempre fuera.

Ejercicio de síntesis

a) Ingresos $10x$ y costes $400 + 6x$. $10x > 400 + 6x \Rightarrow 4x > 400 \Rightarrow x > 100$. Gana dinero **a partir de 101 quesos**; con 100 justos, ni gana ni pierde.
b) $\dfrac{400 + 6x}{x} \leq 8$. Aquí x es un número de quesos, siempre positivo, y por eso sí se puede multiplicar por x sin cambiar el sentido: $400 + 6x \leq 8x \Rightarrow 400 \leq 2x \Rightarrow x \geq 200$. Debe fabricar **al menos 200 quesos**. Comprobación con $x = 200$: $\dfrac{1.600}{200} = 8$.
c) $-p^2 + 26p - 120 > 0 \Rightarrow p^2 - 26p + 120 < 0$. Raíces: $p = \dfrac{26 \pm \sqrt{676 - 480}}{2} = \dfrac{26 \pm 14}{2}$, es decir, $p = 6$ y $p = 20$. En $p = 10$ el polinomio vale $100 - 260 + 120 = -40$, negativo. Obtiene beneficio con precios **entre 6 € y 20 €**, sin incluirlos.

d) Leche de oveja: $2x + y \leq 200$. Leche de cabra: $2x + 3y \leq 300$. Además, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
$2x + y = 200$ pasa por $(100, 0)$ y $(0, 200)$. $2x + 3y = 300$ pasa por $(150, 0)$ y $(0, 100)$. El origen cumple las dos.
Corte: restando las ecuaciones, $2y = 100 \Rightarrow y = 50$; entonces $2x = 150 \Rightarrow x = 75$.
Vértices: $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{100}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{75}, \mathbf{50})$ y $(\mathbf{0}, \mathbf{100})$.



e) Punto $(80, 50)$. Oveja: $160 + 50 = 210$, que supera los 200 litros. Cabra: $160 + 150 = 310$, que supera los 300. **No puede**: le faltarían 10 litros de cada leche. Sí podría elaborar 75 curados y 50 frescos, que es justo el vértice donde se agotan las dos.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Pasar de una desigualdad a un intervalo y a su dibujo en la recta.
- ☐ Resolver una inecuación de primer grado y cambiar el sentido al dividir entre un negativo.
- ☐ Resolver un sistema de inecuaciones con una incógnita.
- ☐ Resolver una inecuación de segundo grado con raíces y tabla de signos.
- ☐ Reconocer cuándo una inecuación de segundo grado se cumple siempre o nunca.
- ☐ Resolver una inecuación con fracción y dejar fuera las raíces del denominador.
- ☐ Decidir si los extremos de un intervalo entran en la solución.
- ☐ Representar un semiplano con un punto de prueba.
- ☐ Dibujar la región solución de un sistema con dos incógnitas y calcular sus vértices.
- ☐ Traducir a inecuaciones las condiciones de un enunciado y responder con una frase.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 6 · TODO EN MEDIA CARA

Reglas	sumar o restar: mismo sentido · multiplicar o dividir por un positivo: mismo sentido · por un negativo: **cambia el sentido**
Intervalos	paréntesis: extremo fuera ($<$, $>$) · corchete: extremo dentro ($\leq$, $\geq$) · el infinito, siempre con paréntesis
Sistema con una x	resolver cada inecuación y quedarse con la parte común
Segundo grado	comparar con 0 · raíces · zonas · un número de prueba por zona · elegir las zonas del signo pedido
Sin raíces	el polinomio tiene siempre el mismo signo: la inecuación se cumple siempre o nunca
Con fracción	puntos críticos: raíces del numerador y del denominador · tabla con el signo de cada uno · las raíces del denominador, siempre fuera
Semiplano	dibujar la recta con dos puntos · probar $(0, 0)$ · si cumple, ese lado; si no, el otro
Región solución	parte común de todos los semiplanos · cada vértice se calcula con el sistema de sus dos rectas

Comprueba siempre con un número de la solución en la inecuación del enunciado · las raíces son fronteras, no la solución.