BLOQUE I · NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Unidad 5

Sistemas de ecuaciones

Sistemas lineales de dos ecuaciones · clasificación · sistemas no lineales · el método de Gauss · discusión de un sistema · problemas con tres incógnitas · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. Repartir una inversión entre tres fondos, decidir cuántas unidades fabricar de cada producto con las horas disponibles o averiguar cuántas entradas de cada tipo se han vendido son problemas con varias incógnitas y varias condiciones a la vez. Cada condición es una ecuación, y todas juntas forman un sistema. El método de Gauss los resuelve siempre con los mismos pasos, y en segundo de Bachillerato será la base del trabajo con matrices.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Sistemas 2×2	resolver por sustitución, igualación o reducción
2. Clasificación	decir cuántas soluciones tiene un sistema y qué significa en la gráfica
3. No lineales	resolver por sustitución sistemas con cuadrados o productos
4. Método de Gauss	resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas
5. Discusión	reconocer con Gauss si un sistema tiene una, infinitas o ninguna solución
6. Problemas	pasar de un enunciado a un sistema y responder con una frase

1. Teoría

1.1 · Sistemas lineales de dos ecuaciones

PARA MEMORIZAR

Sistema de ecuaciones: varias ecuaciones que deben cumplirse a la vez. **Solución**: valores de las incógnitas que cumplen todas. Un sistema es **lineal** cuando las incógnitas aparecen solo con exponente 1 y sin multiplicarse entre sí. **Tres métodos para un sistema 2×2:**

- **Sustitución**: se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye en la otra.
- **Igualación**: se despeja la misma incógnita en las dos y se igualan los resultados.
- **Reducción**: se multiplican las ecuaciones por números adecuados para que, al sumarlas o restarlas, desaparezca una incógnita.

Ejemplo por reducción. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ Al sumar las dos ecuaciones desaparece la y: $3x = 6 \Rightarrow x = 2$. Se sustituye en la primera: $2 + y = 5 \Rightarrow y = 3$. Solución: $x = 2$, $y = 3$. Comprobación en la segunda: $4 - 3 = 1$.

1.2 · Cuántas soluciones tiene un sistema

Cada ecuación lineal con dos incógnitas es una recta. Resolver el sistema es buscar los puntos comunes a las dos rectas, y solo pueden ocurrir tres cosas.



Compatible determinado
una solución

Compatible indeterminado
infinitas soluciones

Incompatible
ninguna solución

PARA MEMORIZAR

Clasificación. Un sistema es **compatible determinado** (SCD) si tiene una única solución; **compatible indeterminado** (SCI) si tiene infinitas; **incompatible** (SI) si no tiene ninguna.

Ejemplo. En $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ la segunda ecuación es el doble de la primera: dicen lo mismo y hay infinitas soluciones. En $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$ los primeros miembros son proporcionales y los segundos no: las ecuaciones se contradicen y no hay solución.

1.3 · Sistemas no lineales

PARA MEMORIZAR

Sistema no lineal: alguna ecuación tiene cuadrados, productos de incógnitas u otras operaciones. Se resuelve casi siempre por **sustitución**: se despeja una incógnita en la ecuación más sencilla y se lleva a la otra. Cada valor obtenido da su pareja, y las soluciones se escriben por parejas (x, y).

Ejemplo. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$ De la primera, $y = 5 - x$. En la segunda: $x\,(5 - x) = 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ o $x = 3$. Si $x = 2$, $y = 3$; si $x = 3$, $y = 2$. Soluciones: $(2, 3)$ y $(3, 2)$.

1.4 · El método de Gauss

Con tres ecuaciones y tres incógnitas, los métodos anteriores se vuelven largos. El método de Gauss transforma el sistema en otro **escalonado**, con las mismas soluciones, en el que la última ecuación tiene una sola incógnita.

PARA MEMORIZAR

Matriz ampliada: tabla con los coeficientes de las incógnitas y, tras una barra, los términos independientes. **Operaciones permitidas**, que no cambian las soluciones:

- intercambiar dos filas;
- multiplicar o dividir una fila por un número distinto de 0;
- sumar o restar a una fila otra multiplicada por un número.

Objetivo: conseguir ceros debajo de la diagonal. Después se resuelve de abajo arriba.

Ejemplo. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

Se lee de abajo arriba. Tercera fila: $-7z=-21 \Rightarrow z=3$. Segunda: $-3y-3=-9 \Rightarrow y=2$. Primera: $x+2+3=6 \Rightarrow x=1$. Solución: $x=1$, $y=2$, $z=3$.



TRUCO · UNA FILA CADA VEZ, Y LA OPERACIÓN ESCRITA

Escribe junto a cada fila nueva la operación que has hecho, como F_2-2F_1. Así puedes repasarla y el corrector puede seguirte. Para hacer un cero, mira el número que quieres eliminar y el de la fila de arriba en esa columna: si arriba hay un 1 y abajo un 2, la operación es F_2-2F_1. Si toda una fila se puede dividir entre el mismo número, divídela: trabajarás con números más pequeños.



AVISO · LA OPERACIÓN AFECTA A TODA LA FILA

Al hacer F_2-2F_1 se opera en las cuatro columnas, también en la de los términos independientes. El error más frecuente es cambiar los coeficientes y dejar el último número como estaba. Y cuidado con los signos: restar un número negativo es sumar.

1.5 · Discutir un sistema con Gauss

Discutir un sistema es decir de qué tipo es. Con la matriz escalonada basta mirar la última fila.

Última fila	Significa	Tipo de sistema
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & a & b \end{array}\right)$ con $a \neq 0$	$a\,z=b$: se puede despejar z	compatible determinado: una solución
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$0=0$: la ecuación sobraba	compatible indeterminado: infinitas soluciones
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$ con $b \neq 0$	$0=b$: imposible	incompatible: ninguna solución

Infinitas soluciones. Si al escalonar queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, hay dos ecuaciones útiles para tres incógnitas. Se da a una de ellas un valor cualquiera, $z=\lambda$. De la segunda fila, $y=1$; de la primera, $x=3-1-\lambda=2-\lambda$. Soluciones: $(2-\lambda,\ 1,\ \lambda)$, una por cada valor de λ. Por ejemplo, para $\lambda=0$ sale $(2,1,0)$ y para $\lambda=1$, $(1,1,1)$.

1.6 · Problemas con sistemas

MÉTODO PARA LOS PROBLEMAS

1. Nombrar las incógnitas, una por cada cosa que se pregunta, con su unidad. **2.** Escribir una ecuación por cada condición del enunciado. **3.** Ordenar: incógnitas a la izquierda, en el mismo orden, y números a la derecha. **4.** Resolver. **5.** Comprobar en el enunciado y responder con una frase.



CONEXIÓN · CUÁNTOS DATOS HACEN FALTA

Para determinar tres cantidades hacen falta tres condiciones independientes. Si un problema da solo dos, o si la tercera repite lo que ya decían las otras, quedan infinitas respuestas posibles: es un sistema indeterminado. Y si dos condiciones se contradicen, no hay respuesta. Un analista que cruza datos de ventas, costes y producción hace esta misma comprobación antes de dar una cifra.



PARA EL EXAMEN · LO QUE SE PUNTÚA EN UN PROBLEMA

La mitad de la nota de un problema está antes de calcular nada: las incógnitas definidas con una frase («x = número de entradas infantiles») y las tres ecuaciones escritas. Después, la matriz con las operaciones anotadas, la solución y la frase final con las unidades. Quien empieza por los números y no dice qué es cada letra pierde el planteamiento entero.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, comprobación y conclusión.

RESUELTO 1 · Sistema lineal por reducción

Resuelve $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$

Planteamiento. Para eliminar la y se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda por 2: los coeficientes de y quedan 6 y -6.
Desarrollo. $9x + 6y = 36$ y $10x - 6y = 2$. Sumando: $19x = 38 \Rightarrow x = 2$. En la primera ecuación: $6 + 2y = 12 \Rightarrow y = 3$.
Comprobación. En la segunda: $5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$.
Conclusión. Solución: $\mathbf{x = 2}$, $\mathbf{y = 3}$. Es un sistema compatible determinado.

RESUELTO 2 · Clasificar sin resolver

Clasifica e interpreta geométricamente: a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$

Planteamiento. Se comparan las dos ecuaciones buscando proporcionalidad.
Desarrollo. a) La segunda ecuación es la primera multiplicada por 2, término a término. Las dos son la misma recta: **compatible indeterminado**, con infinitas soluciones. Son todos los puntos de la recta $y = 2x - 3$.
b) Los primeros miembros son proporcionales ($4x - 2y$ es el doble de $2x - y$), pero 1 no es el doble de 3. Las rectas son paralelas: **incompatible**, sin solución.
Conclusión. Si al intentar la reducción desaparecen las dos incógnitas a la vez, el resultado $0 = 0$ indica infinitas soluciones y un resultado como $0 = -5$, ninguna.

RESUELTO 3 · Sistema no lineal

Resuelve $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

Planteamiento. Se despeja x en la ecuación lineal, $x = y + 1$, y se sustituye en la otra.
Desarrollo. $(y+1)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 + y^2 = 25 \Rightarrow 2y^2 + 2y - 24 = 0 \Rightarrow y^2 + y - 12 = 0$.
$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \dfrac{-1 \pm 7}{2}$, es decir, $y = 3$ o $y = -4$. Con $x = y + 1$: si $y = 3$, $x = 4$; si $y = -4$, $x = -3$.
Comprobación. $4^2 + 3^2 = 25$ y $(-3)^2 + (-4)^2 = 25$.
Conclusión. Dos soluciones: $(\mathbf{4},\ \mathbf{3})$ y $(\mathbf{-3},\ \mathbf{-4})$. Son los puntos donde la recta corta a la circunferencia de radio 5.

RESUELTO 4 · Método de Gauss

Resuelve por el método de Gauss $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+z=8 \\ x-y+3z=10 \end{cases}$

Desarrollo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Tercera fila: $z=3$. Segunda: $-3y+9=6 \Rightarrow y=1$. Primera: $x+2-3=1 \Rightarrow x=2$.
Comprobación. $2+2-3=1$; $4+1+3=8$; $2-1+9=10$.
Conclusión. Solución: $\mathbf{x=2}$, $\mathbf{y=1}$, $\mathbf{z=3}$. Sistema compatible determinado.

RESUELTO 5 · Discutir con Gauss

Discute y, si es posible, resuelve: a) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x=3 \end{cases}$ b) el mismo sistema con $3x=4$ como tercera ecuación.

Desarrollo. a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La última fila es $0=0$: **compatible indeterminado**. Con $z=\lambda$: de la segunda fila, $-3y+3\lambda=-3 \Rightarrow y=1+\lambda$; de la primera, $x+(1+\lambda)-\lambda=2 \Rightarrow x=1$. Soluciones: $(\mathbf{1},\ \mathbf{1}+\lambda,\ \lambda)$.
b) Con $3x=4$, la tercera fila tras las mismas operaciones es $(0\ \ -3\ \ 3 \mid -2)$, y al restarle la segunda queda $(0\ \ 0\ \ 0 \mid 1)$, es decir, $0=1$: **incompatible**.
Conclusión. En a), la tercera ecuación era la suma de las dos primeras y no aportaba información. En b), contradice a esa suma.

RESUELTO 6 · Un problema con tres incógnitas

Un cine vendió ayer 200 entradas y recaudó 1.360 €. La entrada infantil cuesta 5 €, la de adulto 8 € y la de jubilado 6 €. Se vendieron 20 entradas de adulto más que infantiles y de jubilado juntas. ¿Cuántas entradas de cada tipo se vendieron?

Planteamiento. x = entradas infantiles; y = de adulto; z = de jubilado.

$$\begin{cases} x+y+z=200 \\ 5x+8y+6z=1.360 \\ y=x+z+20 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=200 \\ 5x+8y+6z=1.360 \\ x-y+z=-20 \end{cases}$$

Desarrollo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 5 & 8 & 6 & 1.360 \\ 1 & -1 & 1 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 3 & 1 & 360 \\ 0 & -2 & 0 & -220 \end{array}\right)$$

La tercera fila ya tiene una sola incógnita: $-2y = -220 \Rightarrow y = 110$. Segunda: $330 + z = 360 \Rightarrow z = 30$. Primera: $x + 110 + 30 = 200 \Rightarrow x = 60$.
Comprobación. $60 + 110 + 30 = 200$; $300 + 880 + 180 = 1.360$; $110 = 60 + 30 + 20$.
Conclusión. Se vendieron **60 entradas infantiles, 110 de adulto y 30 de jubilado**. No siempre hay que llegar a la forma triangular completa: basta con que una fila tenga una sola incógnita.

RESUELTO 7 · Un problema no lineal

Una parcela rectangular tiene 34 m de perímetro y su diagonal mide 13 m. Halla sus dimensiones.

Planteamiento. x e y son los lados, en metros. Perímetro: $2x + 2y = 34$, o sea, $x + y = 17$. Diagonal, por el teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 13^2 = 169$.
Desarrollo. $y = 17 - x$. Sustituyendo: $x^2 + (17 - x)^2 = 169 \Rightarrow 2x^2 - 34x + 289 = 169 \Rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0$.
$x = \dfrac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \dfrac{17 \pm 7}{2}$, es decir, $x = 12$ o $x = 5$. Si $x = 12$, $y = 5$; si $x = 5$, $y = 12$.
Comprobación. $2 \cdot 12 + 2 \cdot 5 = 34$ y $12^2 + 5^2 = 169$.
Conclusión. Las dos soluciones describen la misma parcela: mide **12 m por 5 m**.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Operar una fila y olvidar el término independiente.
- Equivocarse de signo al restar un número negativo.
- Colocar las incógnitas en distinto orden en cada ecuación al montar la matriz.
- Dejar una condición del enunciado sin pasar a la forma «incógnitas a la izquierda, número a la derecha».
- Ante una fila de ceros, decir que «no hay solución». La fila $0 = 0$ indica infinitas soluciones.
- En un sistema no lineal, dar los valores sueltos sin emparejarlos.
- En un problema, no definir las incógnitas o no responder con una frase.

3. Ejercicios propuestos

Quince ejercicios en tres niveles. Las soluciones están en el apartado 5; los ejercicios 12 y 13 tienen allí su resolución completa.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Resuelve: a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases}$

2. Clasifica sin resolver: a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

3. Resuelve el sistema escalonado $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+z=5 \\ 2z=6 \end{cases}$

4. Resuelve por Gauss $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$

5. Resuelve $\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=6 \end{cases}$

NIVEL 2 · APLICAR

6. Resuelve por Gauss $\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=5 \\ x+2y+z=6 \end{cases}$ (conviene intercambiar antes las dos primeras filas).

7. Resuelve por Gauss $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x+y-z=-1 \\ 3x-y+2z=9 \end{cases}$

8. Discute y, si es posible, resuelve: a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+z=3 \end{cases}$

9. Resuelve: a) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-y^2=16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x-y=2 \end{cases}$

10. En una cafetería, 3 cafés y 2 tostadas cuestan 8,70 €, y 2 cafés y 3 tostadas, 9,30 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

NIVEL 3 · PENSAR

11. Lucía reparte 30.000 € entre tres fondos que rinden un 2 %, un 4 % y un 6 % anual. Al cabo de un año obtiene 1.160 € de intereses. En el primero invirtió la mitad que en los otros dos juntos. ¿Cuánto invirtió en cada fondo?

12. El taller Maderas Urbión fabrica tres modelos de silla. La tabla indica las horas que necesita cada silla en cada sección y las horas disponibles a la semana. ¿Cuántas sillas de cada modelo debe fabricar para emplear todas las horas?

	modelo A	modelo B	modelo C	horas disponibles
corte	1	2	1	90
montaje	2	1	3	100
pintura	1	1	2	70

13. Discute según el valor de k el sistema $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+ky=6 \end{cases}$ y resuélvelo en cada caso.

14. Un rectángulo tiene 32 cm de perímetro y 60 cm^2 de área. Halla sus lados.

15. Un teatro tiene localidades de patio a 30 €, de anfiteatro a 20 € y de paraíso a 10 €. Para una función vendió 500 localidades y recaudó 11.000 €. Se vendieron tantas de patio como de anfiteatro. ¿Cuántas se vendieron de cada tipo?

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · La mezcla de Tostadores Ardila

Tostadores Ardila prepara 100 kg de una mezcla con tres cafés: de Colombia, a 12 € el kilo; de Brasil, a 8 €; y de Etiopía, a 16 €. El coste total de la mezcla debe ser de 1.080 €, y quiere usar tanto café de Brasil como de los otros dos juntos.

a) Define las incógnitas y plantea el sistema.

b) Resuélvelo por el método de Gauss.

c) Comprueba la solución en el enunciado e interprétala.

d) Un cliente propone cambiar la tercera condición por esta otra: «que el coste medio de la mezcla sea de 10,80 € el kilo». ¿Queda determinada la mezcla? Razona la respuesta.

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. a) $x = 5$, $y = 2$; b) $x = 3$, $y = 2$; c) $x = 2$, $y = 1$.
2. a) compatible indeterminado (la segunda es el doble de la primera); b) incompatible; c) compatible determinado: $x = 2$, $y = 1$.
3. $z = 3$; $y = 2$; $x = 3 - 4 + 3 = 2$.
4. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
5. $(2, 3)$ y $(3, 2)$.
6. $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$.
7. $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$.
8. a) Última fila $0 = 0$: compatible indeterminado; $y = 1$, $x + z = 1$; soluciones $(1 - \lambda,\ 1,\ \lambda)$. b) Última fila $0 = 2$: incompatible.
9. a) $(x - y)(x + y) = 16 \Rightarrow x + y = 8$; solución $(5, 3)$. b) $y^2 + 2y - 3 = 0$; soluciones $(3, 1)$ y $(-1, -3)$.
10. $3c + 2t = 8{,}70$ y $2c + 3t = 9{,}30$: el café cuesta 1,50 € y la tostada, 2,10 €.
11. $x + y + z = 30.000$; $0{,}02x + 0{,}04y + 0{,}06z = 1.160$; $2x = y + z$. Invirtió 10.000 € al 2 %, 12.000 € al 4 % y 8.000 € al 6 %.
12. 20 sillas A, 30 sillas B y 10 sillas C (resolución completa a continuación).
13. Si $k \neq 4$, compatible determinado con solución $(3, 0)$; si $k = 4$, compatible indeterminado (resolución completa a continuación).
14. $x + y = 16$, $x \cdot y = 60 \Rightarrow x^2 - 16x + 60 = 0$: los lados miden 10 cm y 6 cm.
15. $x + y + z = 500$; $30x + 20y + 10z = 11.000$; $x = y$. Se vendieron 200 de patio, 200 de anfiteatro y 100 de paraíso.

Resolución completa del ejercicio 12

Planteamiento. x, y, z = número de sillas de los modelos A, B y C. Cada fila de la tabla es una ecuación: las horas usadas en la sección deben igualar a las disponibles.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 90 \\ 2x + y + 3z = 100 \\ x + y + 2z = 70 \end{cases}$$

Desarrollo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 90 \\ 2 & 1 & 3 & 100 \\ 1 & 1 & 2 & 70 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & 1 & -80 \\ 0 & -1 & 1 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & 1 & -80 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \end{array}\right)$$

Tercera fila: $2z = 20 \Rightarrow z = 10$. Segunda: $-3y + 10 = -80 \Rightarrow y = 30$. Primera: $x + 60 + 10 = 90 \Rightarrow x = 20$.

Comprobación. Corte: $20+60+10=90$. Montaje: $40+30+30=100$. Pintura: $20+30+20=70$.
Resultado. $x=20$, $y=30$, $z=10$.
Conclusión. El taller debe fabricar cada semana **20 sillas del modelo A, 30 del B y 10 del C**.

Resolución completa del ejercicio 13

Planteamiento. Se hace un cero bajo el primer coeficiente con F_2-2F_1 y se mira qué queda en la segunda fila según el valor de k.
Desarrollo. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & k & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k-4 & 0 \end{array}\right)$. La segunda ecuación es $(k-4)\,y=0$.
Si $k\neq 4$, se puede dividir entre $k-4$: $y=0$, y de la primera, $x=3$.
Si $k=4$, la segunda fila es $0=0$. Queda una sola ecuación, $x+2y=3$. Con $y=\lambda$, $x=3-2\lambda$.
Resultado. Para $k\neq 4$: **compatible determinado**, solución $(3,0)$. Para $k=4$: **compatible indeterminado**, soluciones $(3-2\lambda,\ \lambda)$.
Conclusión. Con $k=4$ la segunda ecuación es el doble de la primera y las dos rectas coinciden. Para cualquier otro valor de k las rectas se cortan, siempre en el punto $(3,0)$. El sistema nunca es incompatible.

Ejercicio de síntesis

a) x, y, z = kilos de café de Colombia, de Brasil y de Etiopía.

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 12x+8y+16z=1.080 \\ y=x+z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=100 \\ 12x+8y+16z=1.080 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 12 & 8 & 16 & 1.080 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-12F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -4 & 4 & -120 \\ 0 & -2 & 0 & -100 \end{array}\right)$$

Tercera fila: $-2y=-100 \Rightarrow y=50$. Segunda: $-200+4z=-120 \Rightarrow z=20$. Primera: $x=100-50-20=30$.
c) $30+50+20=100$ kg; $360+400+320=1.080$ €; $50=30+20$. La mezcla lleva **30 kg de Colombia, 50 kg de Brasil y 20 kg de Etiopía**.
d) Un coste medio de 10,80 € el kilo en 100 kg es un coste total de $10{,}80\times 100=1.080$ €, que es lo que ya decía la segunda condición. Quedan dos ecuaciones distintas para tres incógnitas: el sistema es **compatible indeterminado** y la mezcla no queda determinada. Hay infinitas mezclas posibles, por ejemplo la del apartado c), o bien 50 kg de Colombia, 40 kg de Brasil y 10 kg de Etiopía.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Resolver un sistema lineal de dos ecuaciones por sustitución, igualación y reducción.
- ☐ Clasificar un sistema e interpretar cada caso con dos rectas.
- ☐ Resolver por sustitución un sistema no lineal y dar las soluciones por parejas.
- ☐ Escribir la matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones.
- ☐ Hacer ceros bajo la diagonal anotando cada operación.
- ☐ Resolver de abajo arriba un sistema escalonado.
- ☐ Reconocer en la última fila si el sistema tiene una, infinitas o ninguna solución.
- ☐ Escribir las infinitas soluciones con un parámetro.
- ☐ Plantear un problema con tres incógnitas, comprobarlo y responder con una frase.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 5 · TODO EN MEDIA CARA

Métodos 2×2	sustitución (despejar y sustituir), igualación (despejar la misma en las dos), reducción (sumar o restar para eliminar una)
Clasificación	SCD: una solución, rectas que se cortan · SCI: infinitas, la misma recta · SI: ninguna, rectas paralelas
No lineales	despejar en la ecuación sencilla, sustituir en la otra y emparejar cada valor con el suyo
Operaciones de Gauss	intercambiar filas · multiplicar una fila por un número distinto de 0 · sumar a una fila otra multiplicada por un número
Hacer un cero	si arriba hay a y abajo b: $F_{\text{abajo}} - \dfrac{b}{a} F_{\text{arriba}}$, o bien $a\,F_{\text{abajo}} - b\,F_{\text{arriba}}$
Última fila	$(0\ 0\ a \mid b)$, $a \neq 0$: SCD · $(0\ 0\ 0 \mid 0)$: SCI, se usa un parámetro λ · $(0\ 0\ 0 \mid b)$, $b \neq 0$: SI
Resolver	de abajo arriba: primero z, después y, por último x
Problemas	incógnitas con su frase · una ecuación por condición · ordenar · resolver · comprobar en el enunciado · frase final

Cada operación afecta a toda la fila, también al término independiente · escribe siempre la operación junto a la fila.