BLOQUE I · NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Unidad 4

Ecuaciones

Segundo grado · bicuadradas · factorizadas · racionales · con radicales · exponenciales · logarítmicas · problemas · ocho ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. Preguntar a qué precio se ingresa cierta cantidad, cuántas unidades hay que vender para cubrir costes o cuándo se igualarán dos inversiones es plantear una ecuación. Aquí se reúnen todos los tipos que vas a encontrar en el curso. Cada uno tiene su método, y casi todos acaban en una ecuación de segundo grado. La destreza que distingue un buen examen es saber qué soluciones hay que comprobar y por qué.

Cómo reconocer cada tipo y qué hacer

Tipo	Se reconoce porque…	Método	¿Comprobar?
Segundo grado	la mayor potencia es x^2	fórmula	no hace falta
Bicuadrada	solo hay x^4, x^2 y número	cambio $z = x^2$	no hace falta
Factorizable	grado 3 o más	factorizar e igualar cada factor a 0	no hace falta
Racional	la x está en un denominador	multiplicar por el m. c. m.	**sí**
Con radicales	la x está dentro de una raíz	aislar la raíz y elevar al cuadrado	**sí**
Exponencial	la x está en un exponente	misma base, logaritmos o cambio de variable	no hace falta
Logarítmica	la x está dentro de un logaritmo	agrupar y pasar a forma exponencial	**sí**

1. Teoría

1.1 · Ecuaciones de segundo grado

PARA MEMORIZAR

Ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Sus soluciones son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número $\Delta = b^2 - 4ac$ es el **discriminante**: si $\Delta > 0$ hay dos soluciones; si $\Delta = 0$, una (doble); si $\Delta < 0$, ninguna solución real.

Ejemplo. $x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$, es decir, $x = 3$ y $x = 2$.
Incompletas, sin fórmula. Si falta bx: $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Si falta c: $x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x\,(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = -3$.



AVISO · NO DIVIDAS ENTRE x

En $x^2+3x=0$, dividir todo entre x deja $x+3=0$ y hace desaparecer la solución $x=0$. Dividir entre una expresión que puede valer 0 pierde soluciones. Se saca factor común.

1.2 · Ecuaciones bicuadradas

PARA MEMORIZAR

Ecuación bicuadrada $ax^4+bx^2+c=0$. Con el cambio $z=x^2$ se convierte en $az^2+bz+c=0$. Se resuelve en z y se deshace el cambio: $x=\pm\sqrt{z}$. Los valores negativos de z no dan soluciones.

Ejemplo. $x^4-3x^2-4=0$. Con $z=x^2$: $z^2-3z-4=0 \Rightarrow z=\dfrac{3\pm 5}{2}$, es decir, $z=4$ y $z=-1$. De $z=4$ sale $x=\pm 2$; de $z=-1$ no sale nada, porque x^2 no puede ser negativo. Soluciones: $x=2$ y $x=-2$.

1.3 · Ecuaciones factorizadas y de grado superior

PARA MEMORIZAR

Un producto vale 0 solo cuando alguno de sus factores vale 0. Para resolver una ecuación de grado 3 o más se pasa todo a un miembro, se **factoriza** (unidad 3) y se iguala cada factor a 0.

Ejemplo. $x^3-x^2-6x=0 \Rightarrow x\,(x^2-x-6)=0 \Rightarrow x\,(x-3)(x+2)=0$. Soluciones: $x=0$, $x=3$ y $x=-2$.

1.4 · Ecuaciones racionales

PARA MEMORIZAR

Ecuación racional: la incógnita aparece en algún denominador. Se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores para eliminarlos y se resuelve la ecuación que queda. Al final se **descartan** los valores que anulan algún denominador.

Ejemplo. $\dfrac{6}{x}+x=5$. Multiplicando por x: $6+x^2=5x \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ y $x=3$. Ninguna anula el denominador: las dos valen.

Con una solución falsa. $\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{x-1} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$. Para $x=1$ el denominador vale 0 y la ecuación no existe. Única solución: $x=-1$.

1.5 · Ecuaciones con radicales

PARA MEMORIZAR

Ecuación con radicales: la incógnita está dentro de una raíz. **1.** Se aísla el radical en un miembro. **2.** Se elevan al cuadrado los dos miembros. **3.** Se resuelve la ecuación que queda. **4.** Se **comprueban** todas las soluciones en la ecuación original.

Ejemplo. $\sqrt{x+3}=x-3$. Al cuadrado: $x+3=x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow x=6$ y $x=1$.

Comprobación: para $x = 6$, $\sqrt{9} = 3$ y $6 - 3 = 3$, vale. Para $x = 1$, $\sqrt{4} = 2$ y $1 - 3 = -2$, no vale. Única solución: $x = 6$.



AVISO · ELEVAR AL CUADRADO CREA SOLUCIONES FALSAS

2 y -2 son distintos, pero sus cuadrados son iguales. Al elevar al cuadrado, una igualdad falsa como $2 = -2$ se convierte en una verdadera, $4 = 4$. Por eso la ecuación elevada al cuadrado puede tener soluciones que la original no tiene. En las ecuaciones con radicales la comprobación forma parte de la resolución: sin ella, el ejercicio está incompleto.

1.6 · Ecuaciones exponenciales

PARA MEMORIZAR

Ecuación exponencial: la incógnita está en un exponente. Hay tres caminos:

- **Misma base**: si $a^p = a^q$, entonces $p = q$.
- **Logaritmos**: $a^x = b \Rightarrow x = \dfrac{\log b}{\log a}$ (unidad 2).
- **Cambio de variable**: si aparecen a^{2x} y a^x, se hace $z = a^x$, y entonces $a^{2x} = z^2$. Los valores negativos de z se descartan, porque a^x es siempre positivo.

Misma base. $2^{x+1} = 8 = 2^3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$.
Cambio de variable. $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$. Como $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$, con $z = 2^x$ queda $z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = 1$ y $z = 4$. De $2^x = 1$ sale $x = 0$; de $2^x = 4$, $x = 2$.

1.7 · Ecuaciones logarítmicas

PARA MEMORIZAR

Ecuación logarítmica: la incógnita está dentro de un logaritmo. Se agrupan los logaritmos con las propiedades hasta llegar a $\log A = \log B$, de donde $A = B$, o a $\log A = c$, de donde $A = 10^c$. Se **descartan** las soluciones que hacen negativo o nulo el argumento de algún logaritmo.

Ejemplo. $\log x + \log(x - 3) = 1 \Rightarrow \log\big(x\,(x-3)\big) = 1 \Rightarrow x\,(x-3) = 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$ y $x = -2$. Para $x = -2$ aparecería $\log(-2)$, que no existe. Única solución: $x = 5$.

1.8 · Problemas con ecuaciones

MÉTODO PARA LOS PROBLEMAS

1. Elegir la incógnita y decir qué representa, con su unidad. **2.** Traducir el enunciado a una ecuación. **3.** Resolverla. **4.** Descartar las soluciones que no tengan sentido en el contexto (cantidades negativas, por ejemplo). **5.** Responder con una frase.



CONEXIÓN · EL PRECIO QUE DA UN INGRESO

Si una tienda vende $200 - 4x$ unidades al precio de x euros, sus ingresos son $x\,(200 - 4x)$. Preguntar a qué precio ingresa 1.600 € es resolver $x\,(200 - 4x) = 1.600$, una ecuación de segundo grado con dos soluciones, 10 € y 40 €: un precio bajo con muchas ventas y uno alto con pocas. Verás por qué en la unidad 9, al estudiar la parábola.



PARA EL EXAMEN · LA FRASE FINAL

Toda ecuación termina con una línea que diga cuáles son las soluciones: «Soluciones: $x = 2$ y $x = 3$». Si has descartado alguna, escribe cuál y por qué: «$x = 1$ no vale, porque anula el denominador». Esa línea vale puntos, y sin ella el corrector no sabe si has comprobado.

2. Ejercicios resueltos

Ocho ejercicios tipo, uno por cada clase de ecuación. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, comprobación cuando hace falta y conclusión.

RESUELTO 1 · Segundo grado y discriminante

a) Resuelve $3x^2 - 5x - 2 = 0$. b) Sin resolverlas, di cuántas soluciones tienen $x^2 - 4x + 4 = 0$ y $x^2 + x + 1 = 0$.

Desarrollo. a) $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$. $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \dfrac{5 \pm 7}{6}$, es decir, $x = \mathbf{2}$ y $x = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.
b) En $x^2 - 4x + 4 = 0$, $\Delta = 16 - 16 = 0$: una solución doble. En $x^2 + x + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3$: ninguna solución real.
Comprobación. Para $x = 2$: $3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 2 = 0$.
Conclusión. El signo de $-4ac$ es el que más errores provoca: aquí c es negativo y $-4 \cdot 3 \cdot (-2) = +24$.

RESUELTO 2 · Bicuadrada

Resuelve $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Planteamiento. Solo hay x^4, x^2 y término independiente. Cambio $z = x^2$: $z^2 - 13z + 36 = 0$.
Desarrollo. $z = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \dfrac{13 \pm 5}{2}$, es decir, $z = 9$ y $z = 4$.
Se deshace el cambio: $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$; $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.
Conclusión. Cuatro soluciones: $x = \mathbf{3}$, $\mathbf{-3}$, $\mathbf{2}$ y $\mathbf{-2}$. La respuesta se da en x; dejarla en z es quedarse a mitad de camino.

RESUELTO 3 · Factorizar para resolver

Resuelve $2x^3 - 2x^2 - 12x = 0$.

Planteamiento. Es de grado 3 y todos los términos tienen x: se saca factor común y se factoriza.
Desarrollo. $2x\,(x^2 - x - 6) = 0$. Las raíces de $x^2 - x - 6$ son $\dfrac{1 \pm 5}{2}$, es decir, 3 y -2: $2x\,(x - 3)(x + 2) = 0$.
Se iguala cada factor a 0: $2x = 0$; $x - 3 = 0$; $x + 2 = 0$.
Conclusión. Soluciones: $x = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{3}$ y $x = \mathbf{-2}$.

RESUELTO 4 · Racional

Resuelve $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{3}{2}$.

Planteamiento. Denominadores: x, $x - 1$ y 2. Su mínimo común múltiplo es $2x\,(x - 1)$. Valores prohibidos: $x = 0$ y $x = 1$.

Desarrollo. Se multiplica cada término por $2x\,(x-1)$:

$$2\,(x-1)+2x=3x\,(x-1)\;\Rightarrow\;4x-2=3x^2-3x\;\Rightarrow\;3x^2-7x+2=0$$

$x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\dfrac{7\pm5}{6}$, es decir, $x=2$ y $x=\dfrac{1}{3}$.
Comprobación. Ninguna es 0 ni 1. Para $x=2$: $\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$.
Conclusión. Soluciones: $x=\mathbf{2}$ y $x=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$.

RESUELTO 5 · Con radicales

Resuelve $\sqrt{2x+3}=x$.

Planteamiento. El radical ya está aislado. Se elevan al cuadrado los dos miembros.
Desarrollo. $2x+3=x^2\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{2\pm4}{2}$, es decir, $x=3$ y $x=-1$.
Comprobación. Para $x=3$: $\sqrt{9}=3$, y el segundo miembro vale 3. Vale. Para $x=-1$: $\sqrt{1}=1$, y el segundo miembro vale -1. No vale.
Conclusión. Única solución: $x=\mathbf{3}$. El valor $x=-1$ es una solución falsa, creada al elevar al cuadrado.

RESUELTO 6 · Exponenciales

Resuelve: a) $3^{2x-1}=27$ b) $9^x-10\cdot3^x+9=0$

a) Planteamiento. 27 es una potencia de 3: se igualan las bases.
Desarrollo. $3^{2x-1}=3^3\Rightarrow2x-1=3\Rightarrow x=\mathbf{2}$.

b) Planteamiento. $9^x=(3^2)^x=(3^x)^2$. Cambio $z=3^x$.
Desarrollo. $z^2-10z+9=0\Rightarrow z=\dfrac{10\pm8}{2}$, es decir, $z=9$ y $z=1$. Se deshace el cambio: $3^x=9\Rightarrow x=2$; $3^x=1\Rightarrow x=0$.
Comprobación. Para $x=2$: $81-90+9=0$. Para $x=0$: $1-10+9=0$.
Conclusión. Soluciones de b): $x=\mathbf{2}$ y $x=\mathbf{0}$.

RESUELTO 7 · Logarítmica

Resuelve $\log(x+1)+\log(x-2)=1$.

Planteamiento. La suma de logaritmos es el logaritmo del producto, y $1=\log10$.
Desarrollo. $\log\big((x+1)(x-2)\big)=\log10\Rightarrow(x+1)(x-2)=10\Rightarrow x^2-x-12=0$.
$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{1\pm7}{2}$, es decir, $x=4$ y $x=-3$.
Comprobación. Para $x=4$: $\log5+\log2=\log10=1$. Vale. Para $x=-3$ aparecería $\log(-2)$, que no existe. No vale.
Conclusión. Única solución: $x=\mathbf{4}$.

RESUELTO 8 · Un problema

Un grupo de amigos alquila una casa rural por 600 €, que pagan a partes iguales. Si fueran dos más, cada uno pagaría 10 € menos. ¿Cuántos amigos son?

Planteamiento. Sea x el número de amigos. Cada uno paga $\dfrac{600}{x}$ euros. Con dos más pagarían $\dfrac{600}{x+2}$, que son 10 € menos:

$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+2} = 10$$

Desarrollo. Se multiplica por $x\,(x+2)$: $600\,(x+2) - 600x = 10x\,(x+2) \Rightarrow 1.200 = 10x^2 + 20x \Rightarrow x^2 + 2x - 120 = 0$.
$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+480}}{2} = \dfrac{-2 \pm 22}{2}$, es decir, $x = 10$ y $x = -12$.
Comprobación. Un número de personas no puede ser negativo: se descarta -12. Con 10 amigos, cada uno paga 60 €; con 12, pagarían 50 €, que son 10 € menos.
Conclusión. Son **10 amigos**.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Equivocarse con el signo de $-4ac$ cuando c es negativo.
- Dividir entre x y perder la solución $x = 0$.
- Dejar una bicuadrada o una exponencial con cambio de variable resuelta en z.
- Elevar al cuadrado sin haber aislado antes el radical.
- Olvidar el doble producto al elevar al cuadrado un binomio.
- No comprobar las soluciones en las ecuaciones racionales, con radicales y logarítmicas.
- Aceptar z negativo en una exponencial, o un argumento negativo en un logaritmo.
- En un problema, no descartar la solución sin sentido o no responder con una frase.

3. Ejercicios propuestos

Quince ejercicios en tres niveles. Las soluciones están en el apartado 5; los ejercicios 12 y 15 tienen allí su resolución completa.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Resuelve: a) $x^2 - 7x + 10 = 0$; b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$; c) $x^2 - 9 = 0$; d) $3x^2 - 12x = 0$.

2. Sin resolverlas, indica cuántas soluciones reales tiene cada ecuación: a) $x^2 - 6x + 9 = 0$; b) $x^2 + 2x + 5 = 0$; c) $2x^2 - x - 3 = 0$.

3. Resuelve las bicuadradas: a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; b) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$.

4. Resuelve: a) $(x - 1)(x + 4)(2x - 3) = 0$; b) $x^3 - 9x = 0$.

5. Resuelve igualando bases: a) $2^x = 32$; b) $5^{x-1} = 25$; c) $3^{2x} = \dfrac{1}{9}$.

NIVEL 2 · APLICAR

6. Resuelve $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

7. Resuelve y comprueba: a) $\dfrac{3}{x} + 2 = x$; b) $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{x-2}$; c) $\dfrac{5}{x+2} = x - 2$.

8. Resuelve y comprueba: a) $\sqrt{x+7} = x - 5$; b) $\sqrt{3x+1} - 1 = x$; c) $x - \sqrt{x-1} = 3$.

9. Resuelve: a) $2^x = 20$ (con cuatro decimales); b) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$; c) $3^{x+1} + 3^x = 36$.

10. Resuelve y comprueba: a) $\log x = 2$; b) $\log(x - 3) + \log x = 1$; c) $2\log x = \log(5x - 6)$.

NIVEL 3 · PENSAR

11. Un solar rectangular tiene 600 m^2 de superficie y es 10 m más largo que ancho. Halla sus dimensiones.

12. La librería Pasaje compró un lote de libros iguales por 720 €. Si cada libro le hubiera costado 2 € menos, con el mismo dinero habría comprado 4 libros más. ¿Cuántos libros compró y a qué precio?

13. Marina invierte 5.000 € en un fondo que crece un 6 % anual y Jorge invierte 8.000 € en otro que crece un 2 % anual. ¿Al cabo de cuántos años completos tendrá Marina más dinero que Jorge?

14. Halla los valores de k para los que la ecuación $x^2 - kx + 9 = 0$ tiene una única solución.

15. Resuelve $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$.

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · Cuatro preguntas para la tienda Brisa

La tienda en línea Brisa vende fundas para portátil y quiere tomar cuatro decisiones.
a) Al precio de x euros vende $200 - 4x$ fundas al mes. ¿A qué precios ingresa 1.600 € mensuales?
b) Fabricar n fundas tiene un coste por unidad de $5 + \dfrac{300}{n}$ euros. ¿Cuántas debe fabricar para que cada una le cueste 8 €?
c) Su página recibe 2.000 visitas al mes y crecen un 20 % mensual. ¿Cuántos meses completos tardará en superar las 10.000 visitas?
d) El número de pedidos diarios depende del gasto mensual g en publicidad, en euros, según $P = 20 + \sqrt{g - 100}$. ¿Cuánto debe gastar para recibir 50 pedidos diarios?

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. a) $x = 2$, $x = 5$; b) $x = \frac{1}{2}$, $x = -2$; c) $x = \pm 3$; d) $x = 0$, $x = 4$.
2. a) $\Delta = 0$: una, doble; b) $\Delta = -16$: ninguna; c) $\Delta = 25$: dos.
3. a) $z = 1$ y $z = 9$: $x = \pm 1$, $x = \pm 3$. b) $z = 4$ y $z = -2$: $x = \pm 2$.
4. a) $x = 1$, $x = -4$, $x = \frac{3}{2}$; b) $x\,(x-3)(x+3) = 0$: $x = 0$, $x = 3$, $x = -3$.
5. a) $x = 5$; b) $x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$; c) $2x = -2 \Rightarrow x = -1$.
6. $(x-1)(x-3)(x+2) = 0$: $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$.
7. a) $x^2 - 2x - 3 = 0$: $x = 3$, $x = -1$. b) $x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$, que anula el denominador: sin solución. c) $x^2 - 4 = 5$: $x = 3$, $x = -3$.
8. a) $x^2 - 11x + 18 = 0$: candidatas 9 y 2; vale $x = 9$ (para $x = 2$, $3 \neq -3$). b) $x^2 - x = 0$: $x = 0$ y $x = 1$, las dos valen. c) $x^2 - 7x + 10 = 0$: candidatas 5 y 2; vale $x = 5$ (para $x = 2$, $2 - 1 = 1 \neq 3$).
9. a) $x = \frac{\log 20}{\log 2} = 4{,}3219$; b) $z = 2$ y $z = 4$: $x = 1$, $x = 2$; c) $3^x\,(3+1) = 36 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.
10. a) $x = 100$; b) $x^2 - 3x - 10 = 0$: vale $x = 5$ ($x = -2$ no); c) $x^2 = 5x - 6$: $x = 2$ y $x = 3$, las dos valen.
11. $x\,(x+10) = 600 \Rightarrow x^2 + 10x - 600 = 0 \Rightarrow x = 20$ (se descarta -30). El solar mide 20 m por 30 m.
12. 36 libros a 20 € (resolución completa a continuación).
13. $5.000 \cdot 1{,}06^t = 8.000 \cdot 1{,}02^t \Rightarrow \left(\frac{1{,}06}{1{,}02}\right)^t = 1{,}6 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}6}{\log 1{,}039216} = 12{,}22$. Al cabo de 13 años completos (a los 12, 10.060,98 € frente a 10.145,93 €; a los 13, 10.664,64 € frente a 10.348,85 €).
14. $\Delta = k^2 - 36 = 0 \Rightarrow k = 6$ o $k = -6$.
15. $x = 4$ (resolución completa a continuación).

Resolución completa del ejercicio 12

Planteamiento. Sea x el número de libros comprados. Cada uno costó $\dfrac{720}{x}$ euros. Con 4 libros más, cada uno habría costado $\dfrac{720}{x+4}$, que son 2 € menos:

$$\frac{720}{x} - \frac{720}{x+4} = 2$$

Desarrollo. Se multiplica por $x\,(x+4)$:

$$720\,(x+4) - 720x = 2x\,(x+4) \;\Rightarrow\; 2.880 = 2x^2 + 8x \;\Rightarrow\; x^2 + 4x - 1.440 = 0$$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 5.760}}{2} = \dfrac{-4 \pm 76}{2}$, es decir, $x = 36$ y $x = -40$.
Comprobación. Se descarta -40. Con 36 libros, cada uno cuesta $720 : 36 = 20$ €. A 18 € se habrían comprado $720 : 18 = 40$ libros, que son 4 más.
Resultado. $x = 36$.
Conclusión. La librería compró **36 libros a 20 €** cada uno.

Resolución completa del ejercicio 15

Planteamiento. Hay dos radicales. Se aísla uno, se eleva al cuadrado, se aísla el que queda y se vuelve a elevar.
Desarrollo. $\sqrt{x+5} = 5 - \sqrt{x}$. Al cuadrado, con el cuadrado de una diferencia en el segundo miembro:

$$x + 5 = 25 - 10\sqrt{x} + x \;\Rightarrow\; 10\sqrt{x} = 20 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = 2 \;\Rightarrow\; x = 4$$

Comprobación. $\sqrt{4+5} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$. Vale.
Resultado. $x = 4$.

Conclusión. La única solución es $x = 4$. Al elevar $5 - \sqrt{x}$ al cuadrado aparece el doble producto $-10\sqrt{x}$, que es el término que permite aislar el segundo radical.

Ejercicio de síntesis

a) $x\,(200 - 4x) = 1.600 \Rightarrow -4x^2 + 200x - 1.600 = 0 \Rightarrow x^2 - 50x + 400 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{50 \pm 30}{2}$. Ingresa 1.600 € con un precio de **10 €** (vende 160 fundas) y con uno de **40 €** (vende 40).
b) $5 + \dfrac{300}{n} = 8 \Rightarrow \dfrac{300}{n} = 3 \Rightarrow n =$ **100** fundas.
c) $2.000 \cdot 1{,}2^t = 10.000 \Rightarrow 1{,}2^t = 5 \Rightarrow t = \dfrac{\log 5}{\log 1{,}2} = 8{,}83$. Tardará **9 meses completos**: a los 8 meses tendrá 8.600 visitas y a los 9, 10.320.
d) $20 + \sqrt{g - 100} = 50 \Rightarrow \sqrt{g - 100} = 30 \Rightarrow g - 100 = 900 \Rightarrow g =$ **1.000 €**. Comprobación: $20 + \sqrt{900} = 50$.
En cada apartado ha aparecido un tipo distinto de ecuación: de segundo grado, racional, exponencial y con radicales.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Reconocer de qué tipo es una ecuación antes de empezar a operar.
- ☐ Resolver ecuaciones de segundo grado, completas e incompletas, y usar el discriminante.
- ☐ Resolver bicuadradas con el cambio $z = x^2$ y deshacer el cambio.
- ☐ Resolver ecuaciones de grado superior factorizando.
- ☐ Eliminar denominadores y descartar los valores que los anulan.
- ☐ Aislar un radical, elevar al cuadrado y comprobar las soluciones.
- ☐ Resolver exponenciales igualando bases, con logaritmos o con cambio de variable.
- ☐ Resolver ecuaciones logarítmicas sencillas y comprobar los argumentos.
- ☐ Plantear un problema, descartar lo que no tiene sentido y responder con una frase.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 4 · TODO EN MEDIA CARA

Segundo grado	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$\Delta = b^2 - 4ac$: dos, una o ninguna solución
Incompletas	$ax^2 + c = 0$; $ax^2 + bx = 0$	despejar x^2; sacar factor común
Bicuadrada	$z = x^2$	$x = \pm\sqrt{z}$, solo si $z \geq 0$
Factorizada	$A \cdot B \cdot C = 0$	$A = 0$ o $B = 0$ o $C = 0$
Racional	multiplicar por el m. c. m.	descartar lo que anule un denominador
Con radicales	aislar y elevar al cuadrado	comprobar siempre en la ecuación original
Exponencial	$a^p = a^q \Rightarrow p = q$	o logaritmos, o cambio $z = a^x$ con $z > 0$
Logarítmica	$\log A = \log B \Rightarrow A = B$	$\log A = c \Rightarrow A = 10^c$; argumentos positivos
Problemas	incógnita, ecuación, solución	descartar lo que no tenga sentido y responder con una frase

Se comprueban siempre: racionales, con radicales y logarítmicas · nunca se divide entre una expresión con x.