BLOQUE I · NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Unidad 3

Polinomios y fracciones algebraicas

Operaciones con polinomios · la regla de Ruffini · teorema del resto · raíces y factorización · fracciones algebraicas · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. Los ingresos, los costes y el beneficio de una empresa se describen con polinomios en los que x es la cantidad producida. Factorizar el polinomio del beneficio dice de un vistazo con qué producciones la empresa ni gana ni pierde. Y dividir el coste total entre la cantidad da el coste medio, que es una fracción algebraica. Factorizar es además el paso previo para resolver ecuaciones e inecuaciones en las tres unidades siguientes.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Polinomios	hallar el grado y el valor numérico
2. Operaciones	sumar, restar y multiplicar; usar las identidades notables
3. Regla de Ruffini	dividir un polinomio entre $x - a$
4. Teorema del resto	hallar un resto sin dividir; calcular un parámetro
5. Factorización	descomponer un polinomio en factores a partir de sus raíces
6. Fracciones algebraicas	simplificar, sumar, multiplicar y dividir

1. Teoría

1.1 · Polinomios y valor numérico

PARA MEMORIZAR

Polinomio: suma de términos de la forma $a\,x^n$, con n natural. Los números a son los **coeficientes**. El **grado** es el mayor exponente de x; el coeficiente de ese término es el **coeficiente principal**, y el término sin x, el **término independiente**. **Valor numérico** $P(a)$: resultado de sustituir x por el número a.

Ejemplo. $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$ tiene grado 3, coeficiente principal 2 y término independiente 1. No tiene término en x^2: su coeficiente es 0. Su valor numérico en $x = 2$ es $P(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2 + 1 = 16 - 10 + 1 = 7$.

1.2 · Operaciones e identidades notables

Para **sumar o restar** polinomios se agrupan los términos del mismo grado. Para **multiplicar**, cada término del primero multiplica a todos los del segundo y después se agrupa.

Ejemplo. $(x + 2)(x^2 - 3x + 1) = x^3 - 3x^2 + x + 2x^2 - 6x + 2 = x^3 - x^2 - 5x + 2$.

PARA MEMORIZAR

Identidades notables.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



AVISO · EL CUADRADO DE UNA SUMA TIENE TRES TÉRMINOS

$(x+3)^2$ es x^2+6x+9. El término del medio, el doble producto $2\cdot x\cdot 3$, es el que se olvida. Compruébalo con un número: para $x=1$, $(1+3)^2 = 16$, mientras que $1^2+3^2 = 10$.

1.3 · La regla de Ruffini

La regla de Ruffini divide un polinomio entre $x-a$ usando solo los coeficientes. Se escriben en fila los coeficientes del dividendo, ordenados de mayor a menor grado y con un 0 donde falte un término; a la izquierda se escribe a.

	1	2	−1	−2
1		1	3	2
	1	3	2	0

División de x^3+2x^2-x-2 entre $x-1$.

1. El primer coeficiente baja tal cual: 1.
2. Se multiplica por a y el resultado se coloca bajo el siguiente coeficiente: $1\cdot 1 = 1$.
3. Se suma la columna: $2+1=3$.
4. Se repite: $1\cdot 3 = 3$; $-1+3=2$; $1\cdot 2 = 2$; $-2+2=0$.

El último número es el **resto**, 0. Los anteriores son los coeficientes del **cociente**, que tiene un grado menos: x^2+3x+2.

PARA MEMORIZAR

Prueba de la división. dividendo = divisor × cociente + resto. Si el resto es 0, la división es exacta y el dividendo queda factorizado: $x^3+2x^2-x-2 = (x-1)(x^2+3x+2)$.



AVISO · EL SIGNO DE LA IZQUIERDA Y LOS CEROS

Para dividir entre $x-3$ se escribe un 3 a la izquierda; para dividir entre $x+3$, un -3, porque $x+3 = x-(-3)$. Y si al polinomio le falta un término, su hueco se rellena con un 0: los coeficientes de x^3-7x+6 son $1,\ 0,\ -7,\ 6$.

1.4 · Teorema del resto y raíces

PARA MEMORIZAR

Teorema del resto. El resto de dividir $P(x)$ entre $x-a$ es el valor numérico $P(a)$. **Raíz:** número a para el que $P(a)=0$. **Teorema del factor.** a es raíz de $P(x)$ exactamente cuando $x-a$ es un factor de $P(x)$.

Ejemplo. En la división anterior, $P(1) = 1+2-1-2 = 0$: coincide con el resto. Por eso 1 es raíz y $x-1$ es factor. En cambio $P(2) = 8+8-2-2 = 12$: el resto de dividir entre $x-2$ sería 12, y 2 no es raíz.

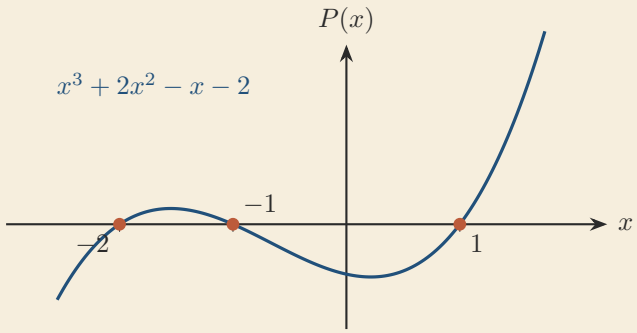
1.5 · Factorizar un polinomio

Factorizar es escribir un polinomio como producto de otros de menor grado. Cada raíz a aporta un factor $x-a$.

MÉTODO PARA FACTORIZAR

1. Si todos los términos tienen x, se saca **factor común**.
2. Se mira si es una **identidad notable**.
3. Se buscan **raíces enteras** entre los divisores del término independiente, probando con el valor numérico.
4. Con cada raíz encontrada se divide por **Ruffini** y se sigue con el cociente.
5. Cuando el cociente es de **segundo grado**, se resuelve con la fórmula. Si no tiene raíces reales, se deja como está.

Ejemplo. $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Candidatas: $\pm 1,\ \pm 2$. Como $P(1) = 0$, se divide entre $x - 1$ y queda $x^2 + 3x + 2$, cuyas raíces son $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$, es decir, -1 y -2. Resultado: $P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$.



Las raíces de un polinomio son los puntos donde su gráfica corta al eje horizontal.



TRUCO · EMPIEZA POR EL 1 Y EL -1

$P(1)$ es la suma de todos los coeficientes, y se calcula de cabeza. Para $P(-1)$ se cambia el signo de los coeficientes de los términos de grado impar y se suma. Si ninguno de los dos da 0, se sigue con ± 2, $\pm 3\ldots$ siempre entre los divisores del término independiente.

1.6 · Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es un cociente de polinomios. Se opera con ellas igual que con las fracciones numéricas, con una condición: antes hay que factorizar.

PARA MEMORIZAR

Simplificar: se factorizan numerador y denominador y se suprimen los factores comunes. **Sumar o restar**: se reducen a común denominador, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores factorizados. **Multiplicar**: numerador por numerador y denominador por denominador. **Dividir**: se multiplica por la inversa de la segunda.

Simplificar. $\dfrac{x^2-9}{x^2+3x} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x\,(x+3)} = \dfrac{x-3}{x}$.

Sumar. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{(x+1)+2\,(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3x-1}{x^2-1}$.



AVISO · SOLO SE SUPRIMEN FACTORES

En $\dfrac{x^2-9}{x^2+3x}$ no se pueden tachar las x^2, porque están sumando. Solo se suprime lo que multiplica a todo el numerador y a todo el denominador. Compruébalo con $x=1$: la fracción vale $\dfrac{-8}{4}=-2$, y $\dfrac{x-3}{x}$ vale también -2.



CONEXIÓN · LAS RAÍCES DEL BENEFICIO

Si el beneficio de una empresa, en miles de euros, es $B(x)=-2x^2+40x-150$, con x en cientos de unidades, al factorizar queda $B(x)=-2\,(x-5)(x-15)$. Las raíces, 5 y 15, son las producciones con beneficio cero: los umbrales de rentabilidad. Entre 500 y 1.500 unidades la empresa gana; fuera de ese tramo, pierde. Lo estudiaremos con inecuaciones en la unidad 6.



PARA EL EXAMEN · QUÉ SE PUNTÚA EN UNA FACTORIZACIÓN

El corrector busca cuatro cosas: la lista de candidatas, la tabla de Ruffini completa con el resto 0 a la vista, la resolución de la ecuación de segundo grado y la factorización final escrita como producto. Comprueba el resultado multiplicando los factores o mirando que el producto de los términos independientes coincide con el del polinomio.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, resultado y conclusión.

RESUELTO 1 · Operar con polinomios

Calcula: a) $(2x^2-3x+1)(x-4)$ b) $(3x-2)^2$

Planteamiento. En a) se multiplica cada término del primer polinomio por los dos del segundo. En b) se aplica el cuadrado de una diferencia.
Desarrollo. a) $2x^3-8x^2-3x^2+12x+x-4=\mathbf{2x^3-11x^2+13x-4}$.
b) $(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2+2^2=\mathbf{9x^2-12x+4}$.
Comprobación. Para $x=1$: en a), $(2-3+1)(1-4)=0$ y $2-11+13-4=0$. En b), $(3-2)^2=1$ y $9-12+4=1$.
Conclusión. El producto de un polinomio de grado 2 por otro de grado 1 tiene grado 3. Sustituir un número sencillo es una comprobación rápida de cualquier operación.

RESUELTO 2 · Dividir con Ruffini

Divide $2x^3-3x^2-11x+7$ entre $x-3$. Indica el cociente y el resto y haz la prueba.

Planteamiento. Coeficientes: $2,\ -3,\ -11,\ 7$. A la izquierda se escribe 3.
Desarrollo.

	2	−3	−11	7
3		6	9	−6
	2	3	−2	1

Resultado. Cociente: $\mathbf{2x^2+3x-2}$. Resto: $\mathbf{1}$.
Comprobación. Por el teorema del resto, $P(3)=2\cdot 27-3\cdot 9-11\cdot 3+7=54-27-33+7=1$.
Conclusión. $2x^3-3x^2-11x+7=(x-3)(2x^2+3x-2)+1$. Como el resto no es 0, 3 no es raíz del polinomio.

RESUELTO 3 · Hallar un parámetro con el teorema del resto

Halla el valor de k para que $P(x)=x^3+kx^2-4x+4$ sea divisible entre $x-2$. Después factoriza el polinomio.

Planteamiento. Ser divisible entre $x-2$ significa que el resto es 0, y el resto es $P(2)$. Se impone $P(2)=0$.
Desarrollo. $P(2)=8+4k-8+4=4k+4=0\Rightarrow k=\mathbf{-1}$. El polinomio es x^3-x^2-4x+4.

	1	−1	−4	4
2		2	2	−4
	1	1	−2	0

Cociente: x^2+x-2, con raíces $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}$, es decir, 1 y -2.
Resultado. $k=-1$ y $P(x)=\mathbf{(x-2)(x-1)(x+2)}$.
Conclusión. El teorema del resto convierte la condición «ser divisible» en una ecuación de primer grado en k.

RESUELTO 4 · Factor común e identidades notables

Factoriza: a) $3x^3 - 12x$ b) $x^3 + 6x^2 + 9x$ c) $x^4 - 16$

Planteamiento. Antes de buscar raíces se saca factor común y se mira si hay una identidad notable.
Desarrollo. a) $3x^3 - 12x = 3x\,(x^2 - 4) = \mathbf{3x\,(x - 2)(x + 2)}$.
b) $x^3 + 6x^2 + 9x = x\,(x^2 + 6x + 9) = \mathbf{x\,(x + 3)^2}$.
c) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = \mathbf{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}$.
Conclusión. En c), el factor $x^2 + 4$ no tiene raíces reales, porque $x^2 + 4$ nunca vale 0, y no se puede descomponer más. En b), la raíz -3 aparece dos veces: es una raíz doble.

RESUELTO 5 · Factorizar con Ruffini

Factoriza $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ e indica sus raíces.

Planteamiento. No hay factor común ni identidad notable. Candidatas a raíz: los divisores de 6, que son $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$.
Desarrollo. $P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$: 1 es raíz. Se divide entre $x - 1$.

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

Cociente: $x^2 - x - 6$. Sus raíces: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$, es decir, 3 y -2.
Resultado. $P(x) = \mathbf{(x - 1)(x - 3)(x + 2)}$. Raíces: 1, 3 y -2.
Comprobación. El producto de los términos independientes de los factores es $(-1)(-3)(2) = 6$, igual que el del polinomio.
Conclusión. Un polinomio de grado 3 tiene como máximo tres raíces; este tiene las tres y todas son enteras.

RESUELTO 6 · Simplificar fracciones algebraicas

Simplifica: a) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ b) $\dfrac{2x^2 - 8x}{x^2 - 16}$

Planteamiento. Se factorizan el numerador y el denominador y se suprimen los factores comunes.
Desarrollo. a) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Las raíces de $x^2 - 5x + 6$ son 2 y 3, luego $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \mathbf{\frac{x + 2}{x - 3}}$$

b) $\dfrac{2x^2 - 8x}{x^2 - 16} = \dfrac{2x\,(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)} = \mathbf{\dfrac{2x}{x + 4}}$.
Conclusión. Las fracciones simplificadas valen lo mismo que las originales para todos los valores de x en los que estas existen. La original de a) no existe para $x = 2$ ni para $x = 3$, porque el denominador se anula.

RESUELTO 7 · Operar con fracciones algebraicas

Opera y simplifica: a) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x}:\dfrac{x+1}{x^2}$

Planteamiento. En a) hace falta denominador común. Como $x^2-4=(x-2)(x+2)$, el mínimo común múltiplo es $(x-2)(x+2)$. En b) se multiplica por la inversa.

Desarrollo. a) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{(x+2)-4}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\boxed{\dfrac{1}{x+2}}$.

b) $\dfrac{x^2-1}{x}\cdot\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)\cdot x^2}{x\,(x+1)}=\mathbf{x\,(x-1)}$.

Comprobación. Para $x=3$: en a), $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$. En b), $\frac{8}{3}:\frac{4}{9}=6$ y $3\cdot 2=6$.

Conclusión. Después de operar se vuelve a mirar si el resultado se puede simplificar. En a) aparece un factor común que no se veía al principio.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Olvidar el doble producto en el cuadrado de una suma o de una diferencia.
- No escribir un 0 en Ruffini cuando falta un término.
- Poner a la izquierda de la tabla el signo contrario: para $x+2$ se escribe -2.
- Escribir el factor con el mismo signo que la raíz: la raíz -1 da el factor $x+1$.
- Olvidar el factor común o el coeficiente principal en la factorización final.
- Tachar sumandos en una fracción algebraica.
- Sumar fracciones sumando numeradores y denominadores.

3. Ejercicios propuestos

Quince ejercicios en tres niveles. Las soluciones están en el apartado 5; los ejercicios 11 y 15 tienen allí su resolución completa.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Dado $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5$, calcula $P(-1)$, $P(2)$ y $P(0)$.

2. Con $A(x) = 2x^2 - x + 3$ y $B(x) = x^2 + 4x - 5$, calcula $A + B$ y $A - B$. Calcula también $(x+3)(2x-1)$.

3. Desarrolla: a) $(x+5)^2$; b) $(2x-3)^2$; c) $(x+4)(x-4)$.

4. Divide con Ruffini e indica cociente y resto: a) $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x-2)$; b) $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x+1)$.

5. Sin hacer la división, halla el resto de dividir $2x^3 - x^2 + 3x - 4$: a) entre $x - 1$; b) entre $x + 2$.

NIVEL 2 · APLICAR

6. Factoriza con factor común e identidades notables: a) $2x^3 - 18x$; b) $x^2 - 10x + 25$; c) $4x^2 - 9$; d) $x^3 + 4x^2 + 4x$.

7. Factoriza e indica las raíces: a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$; b) $x^3 - 7x + 6$.

8. Factoriza $x^4 - 5x^2 + 4$.

9. Simplifica: a) $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 + 5x}$; b) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$; c) $\dfrac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1}$.

10. Opera y simplifica: a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x+1}$; b) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$; c) $\dfrac{x+2}{x^2} \cdot \dfrac{x}{x^2-4}$.

NIVEL 3 · PENSAR

11. Halla m para que $x = 2$ sea raíz de $P(x) = x^3 - mx^2 + 2x - 8$. Factoriza después el polinomio y explica por qué no tiene más raíces reales.

12. Escribe, desarrollado, un polinomio de grado 3 que tenga por raíces -2, 1 y 4 y cuyo coeficiente principal sea 2.

13. El beneficio mensual de la empresa Aceros Lezama, en miles de euros, es $B(x) = -2x^2 + 40x - 150$, donde x es la producción en cientos de unidades. Factoriza $B(x)$ e indica con qué producciones el beneficio es cero.

14. Con una plancha de cartón de 30 cm por 20 cm se construye una caja sin tapa recortando en cada esquina un cuadrado de lado x y doblando los bordes. a) Comprueba que el volumen es $V(x) = x\,(30 - 2x)(20 - 2x)$ y desarróllalo. b) Calcula $V(4)$. c) ¿Para qué valores de x se anula el volumen? Interpreta el resultado.

15. Simplifica $\dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}$.

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · El beneficio de Hornos Belmonte

La empresa Hornos Belmonte fabrica hornos de leña. Su beneficio semanal, en miles de euros, viene dado por $B(x) = -x^3 + 12x^2 - 35x + 24$, donde x es la producción en cientos de unidades. El modelo es válido para producciones de al menos 100 unidades ($x \geq 1$).

a) Calcula $B(2)$ y $B(5)$ e interpreta los dos resultados.

b) Comprueba que $x = 1$ es raíz de $B(x)$ y factoriza el polinomio.

c) ¿Con qué producciones el beneficio es cero?

d) Con los resultados de a) y c), indica entre qué producciones la empresa obtiene beneficios.

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. $P(-1) = -1 - 2 + 5 = 2$; $P(2) = 8 - 8 + 5 = 5$; $P(0) = 5$.

2. $A + B = 3x^2 + 3x - 2$; $A - B = x^2 - 5x + 8$; $(x + 3)(2x - 1) = 2x^2 + 5x - 3$.

3. a) $x^2 + 10x + 25$; b) $4x^2 - 12x + 9$; c) $x^2 - 16$.

4. a) Cociente $x^2 + 4x + 3$, resto 0. b) Coeficientes $1,\ 0,\ -3,\ 0,\ 2$; cociente $x^3 - x^2 - 2x + 2$, resto 0.

5. a) $P(1) = 2 - 1 + 3 - 4 = 0$. b) $P(-2) = -16 - 4 - 6 - 4 = -30$.

6. a) $2x\,(x - 3)(x + 3)$; b) $(x - 5)^2$; c) $(2x - 3)(2x + 3)$; d) $x\,(x + 2)^2$.

7. a) $(x - 2)(x + 1)(x + 3)$; raíces $2, -1, -3$. b) Coeficientes $1,\ 0,\ -7,\ 6$; $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$; raíces $1, 2, -3$.

8. $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

9. a) $\dfrac{x - 5}{x}$; b) $\dfrac{x + 1}{x + 2}$; c) $\dfrac{3\,(x + 1)}{x - 1}$.

10. a) $\dfrac{5x + 2}{x\,(x + 1)}$; b) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; c) $\dfrac{1}{x\,(x - 2)}$.

11. $m = 1$; $(x - 2)(x^2 + x + 4)$ (resolución completa a continuación).

12. $2\,(x + 2)(x - 1)(x - 4) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$.

13. $B(x) = -2\,(x - 5)(x - 15)$. El beneficio es cero con 500 y con 1.500 unidades.

14. a) La base mide $30 - 2x$ por $20 - 2x$ y la altura es x; $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$. b) $V(4) = 4 \cdot 22 \cdot 12 = 1.056$ cm^3. c) Para $x = 0$, $x = 10$ y $x = 15$. Con $x = 0$ no hay altura y con $x = 10$ desaparece el lado de 20 cm; $x = 15$ no es posible, porque el recorte no cabe. El problema solo tiene sentido para $0 < x < 10$.

15. $\dfrac{x + 2}{x}$ (resolución completa a continuación).

Resolución completa del ejercicio 11

Planteamiento. Que 2 sea raíz significa $P(2) = 0$. De ahí sale m. Después se divide entre $x - 2$.

Desarrollo. $P(2) = 8 - 4m + 4 - 8 = 4 - 4m = 0 \Rightarrow m = 1$. El polinomio es $x^3 - x^2 + 2x - 8$.

	1	-1	2	-8
2		2	2	8
	1	1	4	0

Cociente: $x^2 + x + 4$. Su discriminante es $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15$, negativo.

Resultado. $m = 1$ y $P(x) = (\mathbf{x - 2})(\mathbf{x^2 + x + 4})$.

Conclusión. El cociente no tiene raíces reales, porque su discriminante es negativo, y no se puede descomponer más. El polinomio tiene una única raíz real, $x = 2$.

Resolución completa del ejercicio 15

Planteamiento. Hay que factorizar por separado el numerador y el denominador.
Desarrollo. Numerador, $N(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Como $N(1) = 1 - 1 - 4 + 4 = 0$, se divide entre $x - 1$:

	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	0	-4	0

Cociente: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Por tanto $N(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$.
Denominador: $x^3 - 3x^2 + 2x = x\,(x^2 - 3x + 2) = x\,(x - 1)(x - 2)$.

$$\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x + 2)}{x\,(x - 1)(x - 2)} = \frac{x + 2}{x}$$

Resultado. $\boxed{\dfrac{\mathbf{x + 2}}{\mathbf{x}}}$.
Comprobación. Para $x = 3$: la fracción original vale $\dfrac{27 - 9 - 12 + 4}{27 - 27 + 6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$ y la simplificada, $\dfrac{5}{3}$.
Conclusión. Se han suprimido los factores $x - 1$ y $x - 2$, comunes al numerador y al denominador.

Ejercicio de síntesis

a) $B(2) = -8 + 48 - 70 + 24 = \mathbf{-6}$: con 200 unidades la empresa pierde 6.000 € a la semana.
$B(5) = -125 + 300 - 175 + 24 = \mathbf{24}$: con 500 unidades gana 24.000 €.
b) $B(1) = -1 + 12 - 35 + 24 = 0$: 1 es raíz.

	-1	12	-35	24
1		-1	11	-24
	-1	11	-24	0

Cociente: $-x^2 + 11x - 24$, con raíces $x = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121 - 96}}{-2} = \dfrac{-11 \pm 5}{-2}$, es decir, 3 y 8. El coeficiente principal es -1:

$$B(x) = -(\mathbf{x - 1})(\mathbf{x - 3})(\mathbf{x - 8})$$

c) El beneficio es cero con **100, 300 y 800 unidades**.
d) Las raíces dividen las producciones posibles en tramos. Entre 100 y 300 unidades hay pérdidas, como indica $B(2) = -6$. Entre 300 y 800 unidades hay **beneficios**, como indica $B(5) = 24$. Por encima de 800 vuelve a haber pérdidas: por ejemplo, $B(9) = -48$. A la empresa le conviene producir entre 300 y 800 hornos a la semana.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Decir el grado, el coeficiente principal y el término independiente de un polinomio.
- ☐ Calcular un valor numérico cuidando los signos de las potencias.
- ☐ Sumar, restar y multiplicar polinomios y desarrollar las tres identidades notables.
- ☐ Dividir entre $x - a$ con la regla de Ruffini, también cuando falta algún término.
- ☐ Usar el teorema del resto para hallar un resto o un parámetro.
- ☐ Factorizar con factor común, identidades notables, Ruffini y la ecuación de segundo grado.
- ☐ Leer las raíces en la factorización y los factores en las raíces.
- ☐ Simplificar fracciones algebraicas y operar con ellas.
- ☐ Comprobar cualquier resultado sustituyendo un número sencillo.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 3 · TODO EN MEDIA CARA

Identidades notables	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Prueba de la división	$D = d \cdot c + r$	dividendo = divisor × cociente + resto
Ruffini	divide entre $x - a$	a la izquierda va a; huecos con 0
Teorema del resto	resto $= P(a)$	
Raíz	$P(a) = 0$	equivale a que $x - a$ sea factor
Candidatas a raíz entera	divisores del término independiente	con los dos signos
Segundo grado	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)$
Simplificar una fracción	factorizar y suprimir factores	nunca sumandos
Sumar fracciones	$\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{A\,D + C\,B}{B\,D}$	mejor con el m. c. m. de los denominadores
Dividir fracciones	$\dfrac{A}{B} : \dfrac{C}{D} = \dfrac{A\,D}{B\,C}$	

Orden para factorizar: factor común · identidades notables · raíces enteras y Ruffini · ecuación de segundo grado.