BLOQUE I · NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Unidad 2
Logaritmos

Qué es un logaritmo · logaritmos decimales y neperianos · propiedades · desarrollar y agrupar · cambio de base · despejar un exponente · tiempo de duplicación · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. Una población, una deuda o el precio de la vivienda crecen multiplicándose cada año por un mismo número, y el tiempo queda en el exponente. Para saber cuántos años tardará en duplicarse hay que despejar ese exponente, y la única operación que lo consigue es el logaritmo. Lo usarás en la unidad 4 para resolver ecuaciones exponenciales y en la unidad 7 para calcular plazos de inversiones y préstamos.

Qué vas a saber hacer al terminar

Apartado	Ejercicio tipo
1. Definición	calcular un logaritmo pensando en la potencia que esconde
2. Decimal y neperiano	usar las teclas log y ln de la calculadora
3. Propiedades	calcular logaritmos a partir de otros conocidos
4. Desarrollar y agrupar	pasar de un logaritmo a varios y de varios a uno
5. Cambio de base	obtener con la calculadora un logaritmo en cualquier base
6. Despejar un exponente	resolver $a^x = b$
7. Aplicaciones	calcular cuánto tarda una magnitud en duplicarse o en alcanzar un valor

1. Teoría

1.1 · Qué es un logaritmo

La pregunta «¿a qué número hay que elevar 2 para obtener 8?» tiene por respuesta 3, porque $2^3 = 8$. Ese 3 es el logaritmo en base 2 de 8. Un logaritmo es un exponente.

PARA MEMORIZAR

Logaritmo en base a de b: exponente al que hay que elevar la base a para obtener b.

$$\log_a b = c \iff a^c = b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

Consecuencias inmediatas: $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$ $\log_a a^n = n$

Ejemplo. $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$. $\log_{10} 1.000 = 3$ porque $10^3 = 1.000$. $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ porque $3^{-2} = \frac{1}{9}$. $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ porque $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$. $\log_5 1 = 0$ porque $5^0 = 1$.



TRUCO · TAPA EL LOGARITMO Y HAZ LA PREGUNTA

Ante $\log_3 81$, pregúntate en voz baja: «¿tres elevado a qué da ochenta y uno?». Como $3^4 = 81$, la respuesta es 4. Si el número es una fracción, el exponente será negativo; si es una raíz, será una fracción.



AVISO · NO EXISTE EL LOGARITMO DE UN NÚMERO NEGATIVO NI DE CERO

Una base positiva elevada a cualquier exponente da siempre un resultado positivo: $10^{-3} = 0{,}001$, que es pequeño pero positivo. Por eso $\log(-100)$ y $\log 0$ no existen, y la calculadora da error. El resultado de un logaritmo, en cambio, sí puede ser negativo: $\log 0{,}001 = -3$.

1.2 · Logaritmos decimales y neperianos

Dos bases se usan tanto que tienen tecla propia en la calculadora y notación abreviada.

PARA MEMORIZAR

Logaritmo decimal: base 10. Se escribe $\log x$, sin indicar la base. **Logaritmo neperiano**: base e. Se escribe $\ln x$. El número $e = 2{,}71828\ldots$ es irracional y aparece en todos los fenómenos de crecimiento continuo.

Ejemplo. Con la calculadora, $\log 250 = 2{,}3979$ y $\ln 250 = 5{,}5215$. Tiene sentido: 250 está entre $10^2 = 100$ y $10^3 = 1.000$, así que su logaritmo decimal está entre 2 y 3. Sin calculadora, $\log 0{,}01 = -2$ y $\ln e^3 = 3$.

1.3 · Propiedades de los logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, heredan las reglas de las potencias: al multiplicar potencias se suman los exponentes, y al multiplicar números se suman sus logaritmos.

PARA MEMORIZAR

Propiedades (en cualquier base, con $x, y > 0$):

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

La tercera incluye las raíces: $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \log_a x$.

Ejemplo. $\log 25 + \log 4 = \log(25 \cdot 4) = \log 100 = 2$. $\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 16 = 4$. $\log_3 9^5 = 5 \cdot \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$.



AVISO · EL LOGARITMO DE UNA SUMA NO SE PUEDE REPARTIR

$\log(x + y)$ no es $\log x + \log y$. Compruébalo: $\log(10 + 10) = \log 20 = 1{,}30$, mientras que $\log 10 + \log 10 = 2$. Las propiedades transforman productos, cocientes y potencias; con sumas y restas no hay nada que hacer.

1.4 · Desarrollar y agrupar

Las propiedades se usan en los dos sentidos. **Desarrollar** es convertir el logaritmo de una expresión en una suma de logaritmos sencillos. **Agrupar** es el camino inverso: reunir varios logaritmos en uno solo.

Desarrollar. $\log \dfrac{x^2\,y}{z} = \log x^2 + \log y - \log z = 2\log x + \log y - \log z$.

Agrupar. $2\log 3 + \log 5 - \log 9 = \log 3^2 + \log 5 - \log 9 = \log \dfrac{9\cdot 5}{9} = \log 5$. Al agrupar, los números que multiplican a un logaritmo suben primero como exponentes.

1.5 · Cambio de base

La calculadora solo tiene las bases 10 y e. Cualquier otro logaritmo se obtiene dividiendo dos logaritmos decimales.

PARA MEMORIZAR

Fórmula del cambio de base.

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Ejemplo. $\log_2 10 = \dfrac{\log 10}{\log 2} = \dfrac{1}{0{,}30103} = 3{,}3219$. Comprobación: $2^{3{,}3219} = 10{,}00$.

1.6 · Despejar un exponente

Para resolver $a^x = b$ se toman logaritmos en los dos miembros. La propiedad de la potencia baja la incógnita del exponente y deja una ecuación de primer grado.

PARA MEMORIZAR

Ecuación exponencial $a^x = b$.

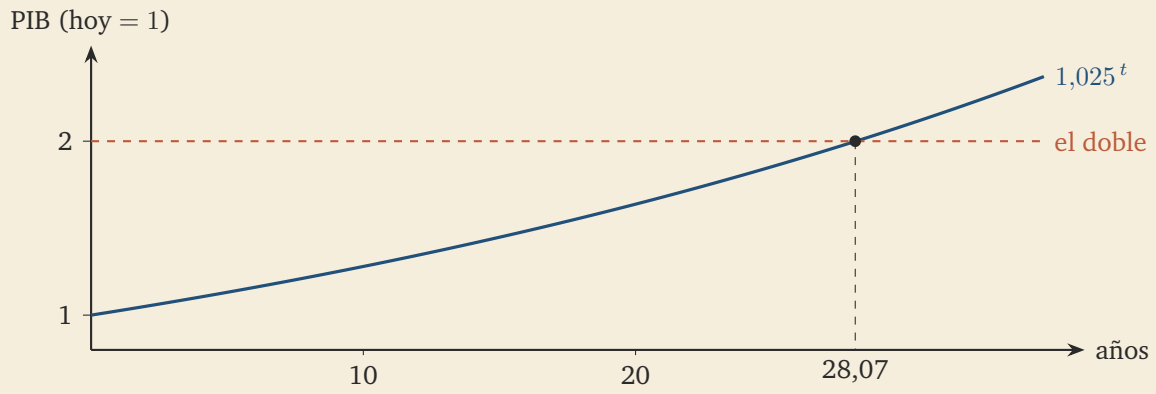
$$a^x = b \implies \log a^x = \log b \implies x\cdot\log a = \log b \implies x = \frac{\log b}{\log a}$$

Si delante de la potencia hay un número multiplicando, se pasa antes al otro miembro dividiendo.

Ejemplo. $3^x = 20 \Rightarrow x\cdot\log 3 = \log 20 \Rightarrow x = \dfrac{\log 20}{\log 3} = \dfrac{1{,}30103}{0{,}47712} = 2{,}7268$. Comprobación: $3^{2{,}7268} = 20{,}00$. Cuando el segundo miembro es una potencia de la misma base no hace falta la calculadora: $2^x = \dfrac{1}{8} = 2^{-3}$, luego $x = -3$.

1.7 · Crecimiento y tiempo de duplicación

Una magnitud que crece un porcentaje fijo $p\,\%$ cada año se multiplica cada año por $1 + \dfrac{p}{100}$. Si hoy vale N_0, al cabo de t años valdrá $N_0\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^t$. El tiempo está en el exponente.



Una economía que crece un 2,5 % anual tarda algo más de 28 años en duplicar su tamaño.

Ejemplo. ¿Cuánto tarda en duplicarse el PIB de un país que crece un 2,5 % cada año? Se plantea $N_0 \cdot 1{,}025^t = 2\,N_0$. Dividiendo entre N_0 queda $1{,}025^t = 2$, y $t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}025} = 28{,}07$ años. El valor inicial se simplifica: el tiempo de duplicación solo depende del ritmo de crecimiento.



CONEXIÓN · LAS ESCALAS LOGARÍTMICAS

La escala de Richter de los terremotos, los decibelios del sonido y el pH de la química son logaritmos: subir un punto significa multiplicar por 10 la magnitud que se mide. Un terremoto de magnitud 7 tiene ondas diez veces más amplias que uno de magnitud 6. Los logaritmos sirven para manejar con números pequeños magnitudes que cambian de tamaño miles de veces.



PARA EL EXAMEN · LAS CUATRO LÍNEAS DE UN DESPEJE

Un despeje de exponente se redacta en cuatro líneas: la ecuación planteada, la potencia aislada, los logaritmos tomados en los dos miembros con el exponente ya bajado y la división final. Usa en numerador y denominador el mismo tipo de logaritmo. Y recuerda que $\dfrac{\log 2}{\log 1{,}05}$ no es $\log \dfrac{2}{1{,}05}$: el cociente de dos logaritmos no se puede simplificar.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, resultado y conclusión.

RESUELTO 1 · Calcular logaritmos con la definición

Calcula sin calculadora: a) $\log_2 32$ b) $\log_3 \dfrac{1}{27}$ c) $\log_{25} 5$ d) $\log 0{,}001$ e) $\ln e^2$

Planteamiento. En cada caso se busca el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número.
Desarrollo. a) $2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = \mathbf{5}$. b) $3^{-3} = \dfrac{1}{27} \Rightarrow \log_3 \dfrac{1}{27} = \mathbf{-3}$.
c) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \log_{25} 5 = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$. d) $10^{-3} = 0{,}001 \Rightarrow \log 0{,}001 = \mathbf{-3}$. e) $\ln e^2 = \mathbf{2}$.
Conclusión. Una fracción de numerador 1 da un logaritmo negativo, y una raíz, un logaritmo fraccionario. Cada resultado se comprueba elevando la base a ese exponente.

RESUELTO 2 · Hallar la base o el número

Halla x en cada caso: a) $\log_x 81 = 4$ b) $\log_2 x = -3$ c) $\log_5 x = 2$

Planteamiento. Cada igualdad se pasa a forma de potencia con la definición: $\log_a b = c \iff a^c = b$.
Desarrollo. a) $x^4 = 81 \Rightarrow x = \sqrt[4]{81} = \mathbf{3}$ (la base debe ser positiva).
b) $x = 2^{-3} = \mathbf{\dfrac{1}{8}}$. c) $x = 5^2 = \mathbf{25}$.
Comprobación. $3^4 = 81$; $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $5^2 = 25$.
Conclusión. Pasar a forma exponencial convierte cada pregunta en una potencia o una raíz conocida.

RESUELTO 3 · Usar las propiedades con datos dados

Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}301$ y $\log 3 \approx 0{,}477$, calcula sin usar la tecla log: a) $\log 6$ b) $\log 5$ c) $\log 72$

Planteamiento. Se escribe cada número con productos, cocientes y potencias de 2, 3 y 10, y se aplican las propiedades. Recuerda que $\log 10 = 1$.
Desarrollo. a) $\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}301 + 0{,}477 = \mathbf{0{,}778}$.
b) $\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 = \mathbf{0{,}699}$.
c) $72 = 2^3 \cdot 3^2 \Rightarrow \log 72 = 3\log 2 + 2\log 3 = 3 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}903 + 0{,}954 = \mathbf{1{,}857}$.
Comprobación. La calculadora da $\log 72 = 1{,}8573$.
Conclusión. Con dos logaritmos conocidos se obtienen los de todos los números que se construyen con 2, 3 y 10. El 5 se consigue como $10 : 2$.

RESUELTO 4 · Desarrollar y agrupar

a) Desarrolla $\log \dfrac{100\,x^3}{\sqrt{y}}$. b) Escribe como un solo logaritmo $2\log x - \log y + 3\log z$. c) Calcula $\log 50 + \log 20$.

Planteamiento. En a) el cociente se convierte en resta, el producto en suma y los exponentes bajan. En b) se hace el camino contrario.

Desarrollo. a) $\log \dfrac{100\,x^3}{\sqrt{y}} = \log 100 + \log x^3 - \log y^{\frac{1}{2}} = \mathbf{2} + \mathbf{3}\log \mathbf{x} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\log \mathbf{y}$.

b) $2\log x - \log y + 3\log z = \log x^2 - \log y + \log z^3 = \log \dfrac{\mathbf{x^2\,z^3}}{\mathbf{y}}$.

c) $\log 50 + \log 20 = \log(50 \cdot 20) = \log 1.000 = \mathbf{3}$.

Conclusión. Los sumandos positivos acaban en el numerador y los negativos en el denominador. Un logaritmo con número delante se agrupa después de subir ese número como exponente.

RESUELTO 5 · Cambio de base

Calcula $\log_2 50$ con cuatro decimales y comprueba el resultado.

Planteamiento. La calculadora no tiene base 2. Se aplica el cambio de base: $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$.

Desarrollo. $\log_2 50 = \dfrac{\log 50}{\log 2} = \dfrac{1{,}69897}{0{,}30103} = \mathbf{5{,}6439}$.

Comprobación. $2^{5{,}6439} = 50{,}00$. Además, 50 está entre $2^5 = 32$ y $2^6 = 64$, así que el resultado debía estar entre 5 y 6.

Conclusión. $\log_2 50 = 5{,}6439$: hay que elevar 2 a 5,6439 para obtener 50.

RESUELTO 6 · Ecuaciones exponenciales

Resuelve: a) $5^x = 200$ b) $2^{x+1} = 48$

Planteamiento. La incógnita está en el exponente. Se toman logaritmos en los dos miembros y se baja el exponente.

Desarrollo. a) $x \cdot \log 5 = \log 200 \Rightarrow x = \dfrac{\log 200}{\log 5} = \dfrac{2{,}30103}{0{,}69897} = \mathbf{3{,}2920}$.

b) $(x+1) \cdot \log 2 = \log 48 \Rightarrow x + 1 = \dfrac{\log 48}{\log 2} = \dfrac{1{,}68124}{0{,}30103} = 5{,}5850 \Rightarrow x = \mathbf{4{,}5850}$.

Comprobación. $5^{3{,}2920} = 200{,}0$ y $2^{4{,}5850+1} = 2^{5{,}5850} = 48{,}00$.

Conclusión. En b) baja el exponente entero, $x + 1$, y por eso va entre paréntesis. El 1 se resta al final.

RESUELTO 7 · ¿Cuándo se alcanza una cifra?

Una ciudad tiene 120.000 habitantes y su población crece un 1,8 % cada año. Si el ritmo se mantiene, ¿cuántos años completos pasarán hasta que supere los 150.000 habitantes?

Planteamiento. Crecer un 1,8 % es multiplicar por $1{,}018$. A los t años la población es $120.000 \cdot 1{,}018^t$. Se busca t en $120.000 \cdot 1{,}018^t = 150.000$.

Desarrollo. Se aísla la potencia: $1{,}018^t = \dfrac{150.000}{120.000} = 1{,}25$.

Se toman logaritmos: $t \cdot \log 1{,}018 = \log 1{,}25 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}25}{\log 1{,}018} = \dfrac{0{,}09691}{0{,}00775} = 12{,}51$ años.

Comprobación. A los 12 años habrá $120.000 \cdot 1{,}018^{12} = 148.646$ habitantes y a los 13 años, $120.000 \cdot 1{,}018^{13} = 151.322$.

Conclusión. La ciudad superará los 150.000 habitantes al cabo de **13 años completos**. A los 12 años todavía no llega.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Repartir el logaritmo en una suma: $\log(x+y) = \log x + \log y$.
- Confundir el cociente de logaritmos con el logaritmo del cociente: $\dfrac{\log 2}{\log 1{,}05}$ no es $\log 2 - \log 1{,}05$.
- Invertir la división del cambio de base o del despeje.
- Tomar logaritmos sin haber aislado antes la potencia.
- Olvidar el paréntesis cuando el exponente es una expresión, como $x+1$.
- Redondear hacia abajo cuando se piden años completos.
- Escribir que un logaritmo «no existe» porque sale negativo: lo que no puede ser negativo es el número del que se calcula.

3. Ejercicios propuestos

Quince ejercicios en tres niveles. Las soluciones están en el apartado 5; los ejercicios 14 y 15 tienen allí su resolución completa.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Calcula sin calculadora: a) $\log_2 64$; b) $\log_3 81$; c) $\log 10.000$; d) $\log_5 \dfrac{1}{25}$; e) $\log_9 3$; f) $\ln 1$.

2. Pasa a la otra forma: a) $2^5 = 32$ (a forma logarítmica); b) $10^{-2} = 0{,}01$ (a forma logarítmica); c) $\log_4 64 = 3$ (a forma exponencial).

3. Halla x: a) $\log_3 x = 4$; b) $\log_x 125 = 3$; c) $\log_2 \dfrac{1}{16} = x$; d) $\log x = -1$.

4. Calcula con la calculadora, con cuatro decimales: a) $\log 37$; b) $\ln 37$; c) $\log 0{,}05$; d) $\ln 2$.

5. Calcula usando las propiedades: a) $\log 5 + \log 20$; b) $\log_2 48 - \log_2 3$; c) $\log_3 \sqrt{27}$; d) $3\log 2 + \log 125$.

NIVEL 2 · APLICAR

6. Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}301$ y $\log 3 \approx 0{,}477$, calcula: a) $\log 12$; b) $\log 1{,}5$; c) $\log 200$; d) $\log 0{,}3$.

7. Desarrolla: a) $\log(a^2\, b^3)$; b) $\log \dfrac{x}{100\, y^2}$; c) $\ln\left(\sqrt{x} \cdot e^3\right)$.

8. Escribe como un solo logaritmo y simplifica si es posible: a) $\log x + 2\log y - 3\log z$; b) $\dfrac{1}{2}\log 16 + \log 5 - \log 2$.

9. Calcula con cuatro decimales: a) $\log_3 100$; b) $\log_5 0{,}4$; c) $\log_{1{,}05} 2$.

10. Resuelve: a) $3^x = 50$; b) $10^x = 7$; c) $2^{3x} = 100$; d) $e^x = 12$.

NIVEL 3 · PENSAR

11. Un capital se coloca al 4 % de interés compuesto anual, de modo que cada año se multiplica por $1{,}04$. ¿Cuántos años completos tarda en duplicarse? ¿Y en triplicarse?

12. Un coche que cuesta 24.000 € pierde cada año el 15 % de su valor. ¿Cuántos años completos pasarán hasta que valga menos de 8.000 €?

13. En un modelo simplificado, la magnitud de un terremoto es $M = \log \dfrac{A}{A_0}$, donde A es la amplitud de sus ondas y A_0 una amplitud de referencia. a) ¿Cuántas veces mayor es la amplitud de un terremoto de magnitud 7,2 que la de uno de magnitud 5,2? b) ¿Y la de uno de magnitud 6,5 frente a uno de magnitud 5?

14. a) Calcula sin calculadora $\log_4 8$ y $\log_8 4$. b) Multiplica los dos resultados. c) Justifica con el cambio de base que $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ para cualquier par de bases válidas.

15. La empresa Altavía factura 2 millones de euros y crece un 12 % anual. Su competidora Bermeo factura 5 millones y crece un 4 % anual. Si los ritmos se mantienen, ¿al cabo de cuántos años completos facturará Altavía más que Bermeo?

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · Los usuarios de Lumen

La plataforma de vídeo Lumen tiene hoy 800.000 usuarios y su número crece un 25 % cada año.
a) Escribe la expresión del número de usuarios al cabo de t años y calcula cuántos tendrá dentro de 3 años.
b) ¿Cuánto tiempo tarda en duplicarse el número de usuarios? Da el resultado con dos decimales y en años completos.
c) La dirección se ha fijado el objetivo de 5 millones de usuarios. ¿Cuántos años completos necesita?
d) Su competidora Órbita tiene 3 millones de usuarios y crece un 5 % anual. ¿Al cabo de cuántos años completos tendrá Lumen más usuarios que Órbita?

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. a) 6; b) 4; c) 4; d) -2; e) $\frac{1}{2}$; f) 0.
2. a) $\log_2 32 = 5$; b) $\log 0{,}01 = -2$; c) $4^3 = 64$.
3. a) $x = 3^4 = 81$; b) $x^3 = 125 \Rightarrow x = 5$; c) $x = -4$; d) $x = 10^{-1} = 0{,}1$.
4. a) 1,5682; b) 3,6109; c) $-1{,}3010$; d) 0,6931.
5. a) $\log 100 = 2$; b) $\log_2 16 = 4$; c) $\log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$; d) $\log(8 \cdot 125) = \log 1.000 = 3$.
6. a) $2\log 2 + \log 3 = 1{,}079$; b) $\log 3 - \log 2 = 0{,}176$; c) $\log 2 + 2 = 2{,}301$; d) $\log 3 - 1 = -0{,}523$.
7. a) $2\log a + 3\log b$; b) $\log x - 2 - 2\log y$; c) $\frac{1}{2}\ln x + 3$.
8. a) $\log \dfrac{x\,y^2}{z^3}$; b) $\log \dfrac{4 \cdot 5}{2} = \log 10 = 1$.
9. a) 4,1918; b) $-0{,}5693$; c) 14,2067.
10. a) $x = \frac{\log 50}{\log 3} = 3{,}5609$; b) $x = \log 7 = 0{,}8451$; c) $3x = \frac{\log 100}{\log 2} = 6{,}6439 \Rightarrow x = 2{,}2146$; d) $x = \ln 12 = 2{,}4849$.
11. Duplicarse: $t = \frac{\log 2}{\log 1{,}04} = 17{,}67$; 18 años completos. Triplicarse: $t = \frac{\log 3}{\log 1{,}04} = 28{,}01$; 29 años completos (a los 28 años el capital se ha multiplicado por 2,9987, que no llega a 3).
12. $0{,}85^t = \frac{8.000}{24.000} = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{\log(1/3)}{\log 0{,}85} = 6{,}76$; 7 años completos (a los 6 años vale 9.051,59 € y a los 7, 7.693,85 €).
13. a) La diferencia de magnitudes es 2: $10^2 = 100$ veces mayor. b) Diferencia de 1,5: $10^{1{,}5} = 31{,}62$ veces mayor.
14. a) $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$; b) 1 (resolución completa a continuación).
15. 13 años completos (resolución completa a continuación).

Resolución completa del ejercicio 14

Planteamiento. Las dos bases, 4 y 8, son potencias de 2. Se escribe todo en base 2 y se aplica la definición.
Desarrollo. a) $\log_4 8 = x \iff 4^x = 8 \iff (2^2)^x = 2^3 \iff 2^{2x} = 2^3 \iff 2x = 3 \iff x = \dfrac{3}{2}$.

$\log_8 4 = y \iff 8^y = 4 \iff 2^{3y} = 2^2 \iff 3y = 2 \iff y = \dfrac{2}{3}$.

b) $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = 1$.

c) Por el cambio de base, $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$ y $\log_b a = \dfrac{\log a}{\log b}$. Al multiplicarlos, $\dfrac{\log b}{\log a} \cdot \dfrac{\log a}{\log b} = 1$.

Resultado. $\log_4 8 = \dfrac{3}{2}$, $\log_8 4 = \dfrac{2}{3}$ y su producto es 1.

Conclusión. Intercambiar la base y el número invierte el logaritmo. La propiedad vale siempre que a y b sean positivos y distintos de 1.

Resolución completa del ejercicio 15

Planteamiento. En millones de euros, a los t años Altavía factura $2 \cdot 1{,}12^t$ y Bermeo $5 \cdot 1{,}04^t$. Se busca el momento en que se igualan: $2 \cdot 1{,}12^t = 5 \cdot 1{,}04^t$.
Desarrollo. Se reúnen las potencias en un miembro y los números en el otro:

$$\frac{1{,}12^t}{1{,}04^t} = \frac{5}{2} \implies \left(\frac{1{,}12}{1{,}04}\right)^t = 2{,}5 \implies 1{,}076923^{\,t} = 2{,}5$$

Se toman logaritmos: $t \cdot \log 1{,}076923 = \log 2{,}5 \Rightarrow t = \dfrac{\log 2{,}5}{\log 1{,}076923} = 12{,}36$ años.

Comprobación.

año	Altavía (millones de €)	Bermeo (millones de €)
12	7,79	8,01
13	8,73	8,33

Resultado. $t = 12{,}36$ años.
Conclusión. Altavía facturará más que Bermeo al cabo de **13 años completos**. Para juntar las dos potencias se ha usado que el cociente de potencias con el mismo exponente es la potencia del cociente.

Ejercicio de síntesis

a) Crecer un 25 % es multiplicar por 1,25: $U(t) = 800.000 \cdot 1{,}25^t$. Dentro de 3 años, $U(3) = 800.000 \cdot 1{,}25^3 = \mathbf{1.562.500}$ usuarios.
b) $800.000 \cdot 1{,}25^t = 1.600.000 \Rightarrow 1{,}25^t = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}25} = \mathbf{3{,}11}$ años. En años completos, **4 años**: a los 3 años hay 1.562.500 usuarios, que no llegan al doble, y a los 4 años, 1.953.125.
c) $1{,}25^t = \dfrac{5.000.000}{800.000} = 6{,}25 \Rightarrow t = \dfrac{\log 6{,}25}{\log 1{,}25} = 8{,}21$ años. Necesita **9 años completos**: a los 8 años tendrá 4.768.372 usuarios y a los 9, 5.960.464.
d) $800.000 \cdot 1{,}25^t = 3.000.000 \cdot 1{,}05^t \Rightarrow \left(\dfrac{1{,}25}{1{,}05}\right)^t = 3{,}75 \Rightarrow 1{,}190476^{\,t} = 3{,}75 \Rightarrow t = \dfrac{\log 3{,}75}{\log 1{,}190476} = 7{,}58$ años. Lumen superará a Órbita al cabo de **8 años completos**: a los 7 años tiene 3,81 millones frente a 4,22, y a los 8 años, 4,77 frente a 4,43.

6. Compruebo que sé...

- ☐ Explicar qué es un logaritmo y pasar de la forma logarítmica a la exponencial.
- ☐ Calcular logaritmos sencillos sin calculadora, también con resultado negativo o fraccionario.
- ☐ Usar las teclas log y ln y decir entre qué enteros debe estar el resultado.
- ☐ Aplicar las propiedades del producto, el cociente y la potencia.
- ☐ Desarrollar un logaritmo y agrupar varios en uno solo.
- ☐ Cambiar de base con la calculadora.
- ☐ Resolver $a^x = b$ tomando logaritmos y comprobar el resultado.
- ☐ Plantear y resolver problemas de crecimiento: cuándo se duplica o cuándo se alcanza una cifra.
- ☐ Decidir cuándo redondear hacia arriba a años completos.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 2 · TODO EN MEDIA CARA

Definición	$\log_a b = c \iff a^c = b$	$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$
Valores fijos	$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$	$\log_a a^n = n$
Decimal y neperiano	$\log x = \log_{10} x,\ \ln x = \log_e x$	$e = 2{,}71828\ldots$
Producto	$\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$	
Cociente	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	
Potencia y raíz	$\log_a x^n = n\,\log_a x$	$\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n}\log_a x$
Cambio de base	$\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$	no se simplifica: es un cociente de dos números
Despejar un exponente	$a^x = b \Rightarrow x = \dfrac{\log b}{\log a}$	antes se aísla la potencia
Crecimiento del $p\,\%$	$N(t) = N_0\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^t$	si disminuye, $1 - \dfrac{p}{100}$
Tiempo de duplicación	$t = \dfrac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$	no depende del valor inicial

No existen $\log 0$ ni el logaritmo de un número negativo · $\log(x+y)$ no se puede repartir.