BLOQUE I · NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Unidad 1

Números reales

Tipos de números · la recta real y los intervalos · valor absoluto · potencias y radicales · racionalizar · notación científica · aproximaciones y errores · siete ejercicios resueltos, quince propuestos y un ejercicio de síntesis



Por qué esta unidad. Un tramo de renta, la tolerancia de un envase, el presupuesto de un país y el margen de error de una encuesta se escriben con las herramientas de esta unidad: intervalos, valor absoluto, potencias de diez y errores. Es además la caja de herramientas del resto del curso. Los radicales vuelven en las ecuaciones, los intervalos en las inecuaciones y en las funciones, y las potencias en el interés compuesto.

Qué vas a saber hacer al terminar

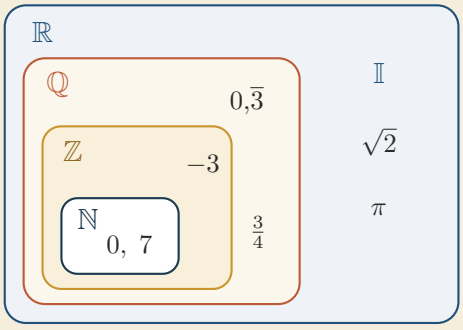
Apartado	Ejercicio tipo
1. Tipos de números	clasificar un número en el conjunto más pequeño al que pertenece
2. Intervalos	pasar de desigualdad a intervalo y a dibujo; hallar uniones e intersecciones
3. Valor absoluto	traducir «a menos de tanto de» a un intervalo
4. Potencias	operar con exponentes negativos y fraccionarios
5. Radicales	extraer factores y sumar radicales semejantes
6. Racionalizar	quitar las raíces de un denominador
7. Notación científica	operar con números muy grandes o muy pequeños
8. Errores	medir cuánto se equivoca una aproximación

1. Teoría

1.1 · Los conjuntos de números

Cada conjunto de números nació para resolver un problema que el anterior dejaba sin respuesta: los enteros permiten restar siempre, los racionales dividir siempre y los reales medir cualquier longitud.

- **Naturales** $\mathbb{N}$: $0, 1, 2, 3\ldots$ Sirven para contar.
- **Enteros** $\mathbb{Z}$: los naturales y sus opuestos, $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\ldots$
- **Racionales** $\mathbb{Q}$: los que se pueden escribir como fracción de enteros. Su expresión decimal es exacta $(0{,}75)$ o periódica $(0{,}333\ldots)$.
- **Irracionales** $\mathbb{I}$: tienen infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica, como $\sqrt{2}$ o π. No se pueden escribir como fracción.
- **Reales** $\mathbb{R}$: racionales e irracionales juntos.



PARA MEMORIZAR

Número racional: el que se puede expresar como $\frac{a}{b}$ con a y b enteros y $b \neq 0$. **Número irracional**: el que no se puede expresar así. **Números reales**: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Los conjuntos están encajados: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Ejemplo. $\sqrt{16} = 4$ es natural. $-\frac{12}{4} = -3$ es entero. $2{,}5 = \frac{5}{2}$ es racional. $\sqrt{5} = 2{,}2360679\ldots$ es irracional. Antes de clasificar, simplifica el número: su aspecto engaña.

1.2 · La recta real y los intervalos

A cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto, un número. Un intervalo es un trozo de recta: todos los números comprendidos entre dos extremos. El corchete indica que el extremo pertenece al intervalo y el paréntesis, que no pertenece.

Intervalo	Desigualdad	Dibujo	Nombre
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$		cerrado
(a, b)	$a < x < b$		abierto
$[a, b)$	$a \leq x < b$		semiabierto
$[a, +\infty)$	$x \geq a$		semirrecta cerrada
$(-\infty, b)$	$x < b$		semirrecta abierta

PARA MEMORIZAR

Intersección $A \cap B$: los números que están en los dos intervalos a la vez. **Unión** $A \cup B$: los que están en al menos uno de los dos. El infinito lleva siempre paréntesis, porque no es un número que se pueda alcanzar.

Ejemplo. Un tramo del impuesto sobre la renta se aplica a las bases «desde 12.450 € hasta menos de 20.200 €»: es el intervalo $[12.450,\ 20.200)$. Con $A = [-1, 4]$ y $B = (2, 7)$, la parte común es $A \cap B = (2, 4]$ y todo lo cubierto es $A \cup B = [-1, 7)$.



TRUCO · DIBUJA ANTES DE ESCRIBIR

Para una unión o una intersección, dibuja los dos intervalos en la misma recta, uno encima del otro. La intersección es la zona donde hay dos trazos y la unión, donde hay al menos uno. Después mira cada extremo por separado para decidir si lleva corchete o paréntesis.

1.3 · Valor absoluto

El valor absoluto de un número es su distancia al cero, y una distancia nunca es negativa. Del mismo modo, $|x - c|$ es la distancia entre x y c.

PARA MEMORIZAR

Valor absoluto. $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$. Para un radio $r > 0$:

$$|x - c| \leq r \iff c - r \leq x \leq c + r \iff x \in [\,c - r,\ c + r\,]$$

$$|x - c| > r \iff x < c - r \ \text{ o } \ x > c + r$$

Ejemplo. $|-7| = 7$ y $|4| = 4$. La condición $|x-3| \leq 2$ describe los números que están a distancia 2 o menos del 3: desde $3-2=1$ hasta $3+2=5$, el intervalo $[1,5]$. Una envasadora que llena paquetes de 500 g con una tolerancia de 15 g cumple $|x-500| \leq 15$, es decir, $x \in [485, 515]$.

1.4 · Potencias

PARA MEMORIZAR

Propiedades de las potencias (con la misma base $a \neq 0$):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m\cdot n} \qquad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo. $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$. $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$. $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.
Conviene hacer primero la raíz y después la potencia: los números quedan más pequeños.



AVISO · EL EXPONENTE NEGATIVO NO CAMBIA EL SIGNO
2^{-3} vale $\frac{1}{8}$, un número positivo. El signo menos del exponente manda la potencia al denominador; no convierte el resultado en negativo. Y las propiedades solo funcionan con productos y cocientes: $(a+b)^2$ es distinto de a^2+b^2.

1.5 · Radicales

Un radical es otra forma de escribir una potencia de exponente fraccionario, y hereda sus propiedades.

PARA MEMORIZAR

Raíz de índice n. $\sqrt[n]{a} = b$ significa que $b^n = a$. **Propiedades:**

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Radicales semejantes: los que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Solo ellos se pueden sumar, y se suman sus coeficientes: $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Extraer factores. Se busca dentro del radicando el mayor cuadrado perfecto (o cubo perfecto, si la raíz es cúbica), se separa con la propiedad del producto y se le hace la raíz.

Ejemplo. $\sqrt{72} = \sqrt{36\cdot 2} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$.
Para sumar $\sqrt{50}+\sqrt{18}$ se extraen factores primero: $5\sqrt{2}+3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. Para multiplicar con el mismo índice se juntan los radicandos: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$.



AVISO · LA RAÍZ DE UNA SUMA NO ES LA SUMA DE LAS RAÍCES
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, mientras que $\sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7$. La raíz se reparte en productos y cocientes, nunca en sumas ni restas. Es el error más repetido de la unidad.

1.6 · Racionalizar

Racionalizar una fracción es escribir otra equivalente sin raíces en el denominador. Se consigue multiplicando numerador y denominador por la misma expresión, de modo que la fracción no cambia de valor.

PARA MEMORIZAR

Denominador con una sola raíz cuadrada: se multiplica arriba y abajo por esa raíz.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Denominador con una suma o una resta: se multiplica arriba y abajo por el conjugado, que es la misma expresión con el signo central cambiado. Abajo queda una diferencia de cuadrados.

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

Ejemplo. $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$ $\qquad$ $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{4\,(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{4\,(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \sqrt{5}+1.$

1.7 · Notación científica

Las cifras de la economía de un país o el tamaño de un virus tienen demasiados ceros para manejarlas con comodidad. La notación científica las escribe como un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia de 10.

PARA MEMORIZAR

Notación científica. $a \cdot 10^n$, con $1 \leq a < 10$ y n entero. El exponente cuenta los lugares que se desplaza la coma: positivo si el número es grande y negativo si es menor que 1. Para **multiplicar o dividir** se operan por un lado los números y por otro las potencias de 10; si el resultado se sale del rango $1 \leq a < 10$, se reajusta.

Ejemplo. $73.500.000 = 7{,}35 \cdot 10^7$ y $0{,}00042 = 4{,}2 \cdot 10^{-4}$. Un país con un producto interior bruto de $1{,}5 \cdot 10^{12}$ € y $4{,}8 \cdot 10^7$ habitantes tiene un PIB por habitante de

$$\frac{1{,}5 \cdot 10^{12}}{4{,}8 \cdot 10^7} = 0{,}3125 \cdot 10^5 = 3{,}125 \cdot 10^4 \text{ €}, \text{ es decir, } 31.250 \text{ € por persona.}$$

1.8 · Aproximaciones y errores

Casi todos los datos que usamos son aproximados. Lo importante es saber cuánto se alejan del valor real.

PARA MEMORIZAR

Error absoluto: distancia entre el valor real y el aproximado, $E_a = |\text{valor real} - \text{valor aproximado}|$. Lleva la unidad de la medida. **Error relativo**: el error absoluto comparado con el valor real, $E_r = \dfrac{E_a}{|\text{valor real}|}$. No tiene unidad y suele darse en porcentaje. Cuanto menor es el error relativo, mejor es la aproximación.

Ejemplo. Un producto cuesta 12,47 € y se redondea a 12,50 €. $E_a = |12{,}47 - 12{,}50| = 0{,}03$ €. $E_r = \dfrac{0{,}03}{12{,}47} = 0{,}0024$, un $0{,}24\,\%$.



CONEXIÓN · EL MARGEN DE ERROR DE UNA ENCUESTA

Cuando un sondeo dice que un partido tiene el 30 % de los votos «con un margen de error de 3 puntos», afirma que el valor real p cumple $|p - 30| \leq 3$, o sea, que está en el intervalo $[27, 33]$. Es un valor absoluto y un intervalo. En segundo de Bachillerato aprenderás a calcular ese margen; se llama intervalo de confianza.



PARA EL EXAMEN · EXACTO O APROXIMADO

Si el enunciado dice «simplifique», «opere» o «racionalice», la respuesta es el valor exacto, con sus raíces: $4\sqrt{2}$. El decimal $5{,}66$ solo se da cuando lo piden de forma expresa, y entonces se escribe con el símbolo $\approx$ y con las cifras que indique el enunciado. Dar un decimal donde se pedía el valor exacto cuesta la mitad del apartado.

2. Ejercicios resueltos

Siete ejercicios tipo, de menos a más. Cada solución sigue el mismo orden: planteamiento, desarrollo, resultado y conclusión.

RESUELTO 1 · Clasificar números

Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada número: -7; $\dfrac{3}{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{2}$; $2{,}1\overline{6}$; $\dfrac{\pi}{2}$; 0.

Planteamiento. Se simplifica cada número y se mira si es natural, entero, racional (fracción, decimal exacto o periódico) o irracional.
Desarrollo.

número	-7	$\frac{3}{4}$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{2}$	$2{,}1\overline{6}$	$\frac{\pi}{2}$	0
conjunto	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{N}$

Conclusión. $\sqrt{9}$ parece irracional por llevar raíz, pero vale 3 y es natural. $2{,}1\overline{6}$ es periódico y por tanto racional. $\dfrac{\pi}{2}$ es irracional, porque dividir un irracional entre un entero no lo convierte en fracción de enteros. Todos son números reales.

RESUELTO 2 · Intervalos, unión e intersección

a) Escribe como intervalo $-2 \le x < 5$ y $x > 3$. b) Calcula $[-1, 4] \cap (2, 7)$. c) Calcula $(-\infty, 1) \cup [0, 3]$.

Planteamiento. El símbolo $\le$ se traduce en corchete y el símbolo $<$ en paréntesis. Para b) y c) se dibujan los dos intervalos en la misma recta.
Desarrollo. a) $-2 \le x < 5 \to [-2, 5)$. $\quad x > 3 \to (3, +\infty)$.
b) Los dos intervalos coinciden desde el 2 hasta el 4. El 2 no está en $(2, 7)$, así que queda abierto; el 4 está en los dos, y queda cerrado: $[-1, 4] \cap (2, 7) = (\mathbf{2}, \mathbf{4}]$.
c) El primero cubre todo lo que hay a la izquierda del 1 y el segundo llega hasta el 3, incluido. Entre los dos no queda ningún hueco: $(-\infty, 1) \cup [0, 3] = (-\infty, \mathbf{3}]$.
Conclusión. La intersección se queda con la parte común y la unión con todo lo cubierto. En cada extremo se comprueba si el número pertenece o no al resultado.

RESUELTO 3 · Valor absoluto y tolerancias

a) Una planta embotelladora llena botellas de 750 ml. El control de calidad admite una desviación máxima de 12 ml. Expresa la condición con valor absoluto y con un intervalo. b) Resuelve $|2x - 1| < 5$.

a) Planteamiento. La distancia entre el contenido x y los 750 ml debe ser de 12 ml como mucho.
Desarrollo. $|x - 750| \le 12 \iff 750 - 12 \le x \le 750 + 12 \iff 738 \le x \le 762$.
Conclusión. Una botella pasa el control si contiene entre 738 y 762 ml, ambos incluidos: $x \in [\mathbf{738}, \mathbf{762}]$.

b) Planteamiento. $|A| < 5$ significa que A está entre -5 y 5.
Desarrollo. $-5 < 2x - 1 < 5$. Se suma 1 en los tres miembros: $-4 < 2x < 6$. Se divide entre 2: $-2 < x < 3$.

Comprobación. Con $x = 0$, $|2 \cdot 0 - 1| = 1 < 5$, cumple. Con $x = 4$, $|8 - 1| = 7$, no cumple.
Conclusión. La solución es el intervalo $(-\mathbf{2}, \mathbf{3})$.

RESUELTO 4 · Potencias de exponente negativo y fraccionario

Calcula: a) $\dfrac{2^3 \cdot 4^{-2}}{8^{-1}}$ b) $27^{\frac{2}{3}}$ c) $16^{-\frac{3}{4}}$

Planteamiento. En a) todas las bases son potencias de 2: $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$. En b) y c), el denominador del exponente es el índice de la raíz.
Desarrollo. a) $\dfrac{2^3 \cdot (2^2)^{-2}}{(2^3)^{-1}} = \dfrac{2^3 \cdot 2^{-4}}{2^{-3}} = 2^{3-4-(-3)} = 2^2 = \mathbf{4}$.
b) $27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = \mathbf{9}$.
c) $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \mathbf{\dfrac{1}{8}}$.
Conclusión. Los resultados son 4, 9 y $\frac{1}{8}$. Pasar todo a la misma base convierte la operación en una suma y resta de exponentes.

RESUELTO 5 · Operar con radicales

Simplifica: a) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27}$ b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$

Planteamiento. En a) hay que extraer factores para ver si los radicales son semejantes. En b) los índices coinciden y se pueden juntar los radicandos.
Desarrollo. a) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.

$$\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27} = 5\sqrt{3} - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (5 - 4 + 3)\sqrt{3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$$

b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = \mathbf{4}$, porque $4^3 = 64$.
Comprobación. Con la calculadora, $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27} = 6{,}9282$ y $4\sqrt{3} = 6{,}9282$.
Conclusión. Los tres radicales de a) eran semejantes y se reducen a $4\sqrt{3}$; el producto de b) es el número natural 4.

RESUELTO 6 · Racionalizar

Racionaliza y simplifica: a) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{6}{\sqrt{7}+2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

Planteamiento. En a) el denominador tiene una sola raíz: se multiplica por ella. En b) y c) hay una suma o una resta: se multiplica por el conjugado.
Desarrollo. a) $\dfrac{10}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = \mathbf{2\sqrt{5}}$.
b) $\dfrac{6}{\sqrt{7}+2} = \dfrac{6\,(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)} = \dfrac{6\,(\sqrt{7}-2)}{7-4} = 2\,(\sqrt{7}-2) = \mathbf{2\sqrt{7} - 4}$.
c) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2 + \sqrt{3}}$.

Conclusión. Las tres fracciones quedan sin raíces en el denominador. En c) el numerador es el cuadrado de una suma, y su doble producto $2\sqrt{3}$ no se puede olvidar.

RESUELTO 7 · Notación científica y errores

a) La distribuidora Ibermarket facturó $3{,}6 \cdot 10^8$ € el año pasado con una plantilla de $4{,}5 \cdot 10^3$ personas. Calcula la facturación por empleado. b) Los organizadores de un festival previeron 12.000 asistentes y acudieron 11.640. Los de una feria local previeron 500 y acudieron 470. ¿Qué previsión fue mejor?

a) Desarrollo. $\dfrac{3{,}6 \cdot 10^8}{4{,}5 \cdot 10^3} = \dfrac{3{,}6}{4{,}5} \cdot 10^{8-3} = 0{,}8 \cdot 10^5 = \mathbf{8 \cdot 10^4}$ €.
Conclusión. Cada empleado genera, de media, 80.000 € de facturación al año.

b) Planteamiento. La calidad de una aproximación se mide con el error relativo.
Desarrollo. Festival: $E_a = |11.640 - 12.000| = 360$ personas; $E_r = \dfrac{360}{11.640} = 0{,}0309$, un $3{,}09\,\%$.
Feria: $E_a = |470 - 500| = 30$ personas; $E_r = \dfrac{30}{470} = 0{,}0638$, un $6{,}38\,\%$.
Conclusión. Fue mejor la previsión del festival. Se equivocó en más personas, pero su error relativo es menos de la mitad que el de la feria.

Errores que hacen perder puntos en esta unidad

- Repartir la raíz en una suma: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Sacar un factor de la raíz sin hacerle la raíz: $\sqrt{18} = 9\sqrt{2}$.
- Sumar radicales que no son semejantes, o juntar un número con un radical: $6 + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.
- Multiplicar por el conjugado solo el denominador.
- Confundir corchete y paréntesis, o poner corchete en el infinito.
- Dejar un resultado en notación científica con el primer factor fuera del rango de 1 a 10.
- Dar un decimal aproximado cuando se pide el valor exacto.

3. Ejercicios propuestos

Quince ejercicios en tres niveles. Las soluciones están en el apartado 5; los ejercicios 13 y 15 tienen allí su resolución completa.

NIVEL 1 · PRACTICAR

1. Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada número: 5; $-\dfrac{2}{3}$; $\sqrt{7}$; $0{,}101001000\ldots$; $3{,}\overline{45}$; $\sqrt{\dfrac{25}{4}}$; $-\sqrt{36}$.

2. Escribe como intervalo: a) $-3 < x \leq 2$; b) $x \geq -1$; c) $x < 4$; d) $0 \leq x \leq 10$.

3. Calcula: a) $8^{\frac{2}{3}}$; b) $25^{-\frac{1}{2}}$; c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$; d) $3^5 \cdot 3^{-3}$.

4. Extrae factores: a) $\sqrt{48}$; b) $\sqrt{200}$; c) $\sqrt[3]{54}$; d) $\sqrt{\dfrac{18}{25}}$.

5. a) Escribe en notación científica $0{,}00042$ y $73.500.000$. b) Calcula y expresa en notación científica $(3 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^{-2})$ y $(6 \cdot 10^8) : (1{,}5 \cdot 10^3)$.

NIVEL 2 · APLICAR

6. Simplifica: a) $3\sqrt{8} - \sqrt{50} + 2\sqrt{18}$; b) $\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{300}$.

7. Racionaliza y simplifica: a) $\dfrac{9}{\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$; c) $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}$; d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

8. Dados $A = [-2, 5)$ y $B = (1, 8]$, calcula $A \cap B$ y $A \cup B$ y represéntalos en la recta real.

9. Resuelve y expresa la solución con intervalos: a) $|x - 4| \leq 3$; b) $|x + 2| < 5$; c) $|x| > 2$.

10. La cámara frigorífica de un supermercado debe mantenerse a 4 °C, con una desviación menor que 1,5 °C. Expresa la condición con valor absoluto y con un intervalo. ¿Cumple la norma una lectura de 5,5 °C?

NIVEL 3 · PENSAR

11. La deuda pública de un país asciende a $1{,}2 \cdot 10^{12}$ €, su población es de $4{,}8 \cdot 10^7$ habitantes y su PIB es de $1{,}5 \cdot 10^{12}$ €. Calcula la deuda por habitante y la deuda como porcentaje del PIB.

12. Una báscula industrial pesa un camión de 18.000 kg con un error de 45 kg. Una balanza de cocina pesa un paquete de 2 kg con un error de 20 g. ¿Cuál de las dos es más precisa?

13. Decide, operando, si cada resultado es racional o irracional: a) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$; b) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$; c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$. ¿Es siempre irracional el producto de dos irracionales?

14. Simplifica $\dfrac{6}{\sqrt{3}} + \sqrt{48} - \left(2\sqrt{3}\right)^2$.

15. Expresa como una sola potencia de base 2 y simplifica: $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{32}}$.

4. Ejercicio de síntesis

SÍNTESIS · La cooperativa Olivar del Jalón

La cooperativa aceitera Olivar del Jalón prepara su memoria anual.
a) Ha producido $3{,}2 \cdot 10^6$ litros de aceite y los ha vendido a un precio medio de 4,50 € el litro. Calcula los ingresos en notación científica.
b) Envasa el aceite en botellas de 750 ml y admite una desviación máxima de 9 ml. Expresa la condición con valor absoluto y con un intervalo.
c) Va a vallar una parcela cuadrada de 2 hectáreas (20.000 m^2). Calcula el valor exacto del lado, indica a qué conjunto numérico pertenece y halla el coste exacto de la valla si el metro cuesta 15 €.
d) El gerente hace el presupuesto de la valla tomando $\sqrt{2} \approx 1{,}41$. Calcula el error absoluto y el error relativo de su presupuesto.

5. Soluciones

Ejercicios propuestos

1. $5 \in \mathbb{N}$; $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{7} \in \mathbb{I}$; $0{,}101001000\ldots \in \mathbb{I}$ (no es periódico); $3{,}\overline{45} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$; $-\sqrt{36} = -6 \in \mathbb{Z}$.
2. a) $(-3, 2]$; b) $[-1, +\infty)$; c) $(-\infty, 4)$; d) $[0, 10]$.
3. a) 4; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{9}{4}$; d) $3^2 = 9$.
4. a) $4\sqrt{3}$; b) $10\sqrt{2}$; c) $3\sqrt[3]{2}$; d) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$.
5. a) $4{,}2 \cdot 10^{-4}$ y $7{,}35 \cdot 10^{7}$. b) $12 \cdot 10^3 = 1{,}2 \cdot 10^4$ y $4 \cdot 10^5$.
6. a) $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$.
7. a) $3\sqrt{3}$; b) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; c) $\frac{8\,(3+\sqrt{5})}{9-5} = 6 + 2\sqrt{5}$; d) $\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 2 - \sqrt{2}$.
8. $A \cap B = (1, 5)$; $A \cup B = [-2, 8]$.
9. a) $[1, 7]$; b) $(-7, 3)$; c) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
10. $|T - 4| < 1{,}5$; $T \in (2{,}5;\ 5{,}5)$. Una lectura de 5,5 °C no cumple, porque el extremo no pertenece al intervalo.
11. Deuda por habitante: $\frac{1{,}2 \cdot 10^{12}}{4{,}8 \cdot 10^{7}} = 2{,}5 \cdot 10^4$ €, 25.000 €. Deuda sobre PIB: $\frac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}8$, el 80 %.
12. Báscula: $E_r = \frac{45}{18.000} = 0{,}25\,\%$. Balanza: $E_r = \frac{20}{2.000} = 1\,\%$. Es más precisa la báscula industrial.
13. a) racional; b) irracional; c) racional. No siempre (resolución completa a continuación).
14. $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 12 = 6\sqrt{3} - 12$.
15. $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ (resolución completa a continuación).

Resolución completa del ejercicio 13

Planteamiento. Se opera cada expresión hasta dejarla simplificada y se mira si queda alguna raíz que no sea exacta.
Desarrollo. a) Es una suma por una diferencia: $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$.
b) Es el cuadrado de una suma: $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$.
c) Mismo índice, se juntan los radicandos: $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$.
Resultado. a) 1, racional. b) $5 + 2\sqrt{6}$, irracional, porque $\sqrt{6}$ lo es. c) 4, racional.
Conclusión. El producto de dos irracionales puede ser racional: en a) los dos factores son irracionales y el producto vale 1, y en c) ocurre lo mismo con $\sqrt{8}$ y $\sqrt{2}$. Para clasificar un número hay que simplificarlo antes.

Resolución completa del ejercicio 15

Planteamiento. Los índices son distintos (2, 3 y 6), así que los radicales no se pueden juntar directamente. Se escribe cada uno como potencia de base 2 con exponente fraccionario y se aplican las propiedades de las potencias.
Desarrollo. $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[6]{32} = \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}$.

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{5}{6}}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}} = 2^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}-\frac{5}{6}} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

Resultado. $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.
Comprobación. Con la calculadora, $\dfrac{1{,}41421 \times 1{,}58740}{1{,}78180} = 1{,}25992$ y $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992$.
Conclusión. La expresión equivale a $\sqrt[3]{2}$. Cuando los índices no coinciden, pasar a exponentes fraccionarios convierte el problema en una suma de fracciones.

Ejercicio de síntesis

a) $3{,}2 \cdot 10^6 \times 4{,}5 = 14{,}4 \cdot 10^6 = \mathbf{1{,}44 \cdot 10^7}$ **€**, que son 14,4 millones de euros.
b) $|x - 750| \leq 9 \iff 741 \leq x \leq 759$: $x \in [\mathbf{741}, \mathbf{759}]$ ml.
c) Lado: $\sqrt{20.000} = \sqrt{10.000 \cdot 2} = \mathbf{100\sqrt{2}}$ m, un número irracional. Perímetro: $4 \cdot 100\sqrt{2} = 400\sqrt{2}$ m. Coste: $400\sqrt{2} \cdot 15 = \mathbf{6.000\sqrt{2}}$ **€**, aproximadamente 8.485,28 €.
d) Presupuesto del gerente: $6.000 \times 1{,}41 = 8.460$ **€**. $E_a = |8.485{,}28 - 8.460| = \mathbf{25{,}28}$ **€**. $E_r = \dfrac{25{,}28}{8.485{,}28} = 0{,}00298$, un $\mathbf{0{,}30}\,\%$. El presupuesto se queda 25,28 € corto: un error pequeño en $\sqrt{2}$ se multiplica por 6.000. Conviene trabajar con el valor exacto y aproximar solo al final.

6. Compruebo que sé…

- ☐ Clasificar un número en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$ después de simplificarlo.
- ☐ Pasar de una desigualdad a un intervalo y a su dibujo, y al revés.
- ☐ Hallar la unión y la intersección de dos intervalos.
- ☐ Traducir $|x - c| \leq r$ a un intervalo y resolver inecuaciones con valor absoluto de ese tipo.
- ☐ Operar con potencias de exponente negativo y fraccionario.
- ☐ Extraer factores de un radical y sumar radicales semejantes.
- ☐ Racionalizar denominadores con una raíz o con una suma o resta de raíces.
- ☐ Escribir y operar números en notación científica.
- ☐ Calcular el error absoluto y el relativo y decidir qué aproximación es mejor.

7. Hoja de fórmulas

UNIDAD 1 · TODO EN MEDIA CARA

Conjuntos	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$; racional = fracción = decimal exacto o periódico
Intervalos	$[a,b]$, (a,b), $[a,b)$	corchete: el extremo entra; paréntesis: no entra; infinito siempre con paréntesis
Valor absoluto	$\lvert x-c\rvert \le r \iff x \in [c-r,\ c+r]$	distancia de x a c
Potencias	$a^m a^n = a^{m+n},\ (a^m)^n = a^{mn}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\ a^0 = 1$
Exponente fraccionario	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	primero la raíz, después la potencia
Radicales	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	nunca con sumas: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
Racionalizar	$\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$	con suma o resta: multiplicar por el conjugado
Conjugado	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$	
Notación científica	$a \cdot 10^n,\ 1 \le a < 10$	se operan aparte los números y las potencias de 10
Errores	$E_a = \lvert\text{real} - \text{aprox.}\rvert$	$E_r = \dfrac{E_a}{\lvert\text{real}\rvert}$, en porcentaje

Cuadrados perfectos: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144 · cubos perfectos: 8, 27, 64, 125.