PLANTILLA · SOLOW CON PROGRESO TECNOLÓGICO

$Y_t = K_t^{\alpha}(E_t L_t)^{1-\alpha}$ $\alpha =$ _____ $s =$ _____ $\bar{\delta} =$ _____ $n =$ _____ $g =$ _____ Cambia: _____

Seis pasos. Todo depende de una pregunta: ¿qué queda constante a largo plazo y qué crece?

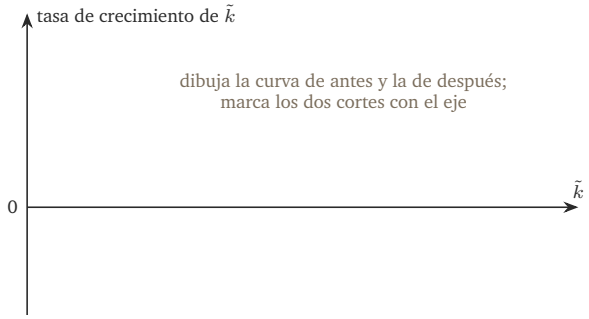
1 **Las tres medidas.** Rellena la última columna antes de leer los apartados.

Medida	Definición	Tasa de crecimiento a largo plazo
Por unidad de eficiencia	$\tilde{y}_t = \dfrac{Y_t}{E_t L_t} = \tilde{k}_t^{\alpha}$	
Por trabajador	$y_t = \dfrac{Y_t}{L_t} = E_t\,\tilde{y}_t$	
Agregada	$Y_t = E_t\,L_t\,\tilde{y}_t$	

2 **El estado estacionario, antes.** La inversión cubre la depreciación, los trabajadores nuevos y la mejora de la eficiencia: $s\,\tilde{k}^{\alpha} = (\bar{\delta} + n + g)\,\tilde{k}$.

$$\frac{s}{\bar{\delta}+n+g} = _____ \qquad \tilde{k}^* = \Big(_____\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}} = _____ \qquad \tilde{y}^* = \Big(_____\Big)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = _____$$

3 **El diagrama de la tasa de crecimiento.** $g_t^{\tilde{k}} = \dfrac{s}{(1+g)(1+n)} \cdot \dfrac{1}{\tilde{k}_t^{1-\alpha}} - \dfrac{\bar{\delta}+n+g}{(1+g)(1+n)}$



El parámetro que cambia es _____.

Primer término de la tasa: _____.

Constante que se resta: _____.

La curva se desplaza hacia _____ y $\tilde{k}^*$ _____.

Más ahorro sube la curva. Más población, más depreciación o más g la bajan.

4 **El estado estacionario, después.**

$$\frac{s}{\bar{\delta}+n+g} = _____ \qquad \tilde{k}^{*\prime} = _____ \qquad \tilde{y}^{*\prime} = _____ \qquad \frac{\tilde{y}^{*\prime}}{\tilde{y}^*} = _____$$

5 **La producción por trabajador,** $y_t = E_t\,\tilde{y}_t$.

En el momento del cambio _____. Durante la transición crece _____. A largo plazo queda un _____ % por _____ de la senda anterior.

6 **Las tasas de largo plazo.** y_t crece al _____ % antes y al _____ % después. Y_t crece al _____ % antes y al _____ % después.

Por qué cambia el nivel y no la tasa: _____

Antes de entregar. ¿He dicho de qué medida hablo en cada frase? · ¿El denominador lleva las tres tasas, $\bar{\delta}+n+g$? · ¿El capital lleva el exponente $\frac{1}{1-\alpha}$ y la producción $\frac{\alpha}{1-\alpha}$? · ¿El diagrama tiene las dos curvas y los dos cortes? · ¿La senda de y_t se dobla sin saltar? · ¿He separado nivel y tasa de crecimiento? · ¿He dado la tasa agregada, $n+g$, si la piden?

EJEMPLO RESUELTO · UN BOOM DEMOGRÁFICO

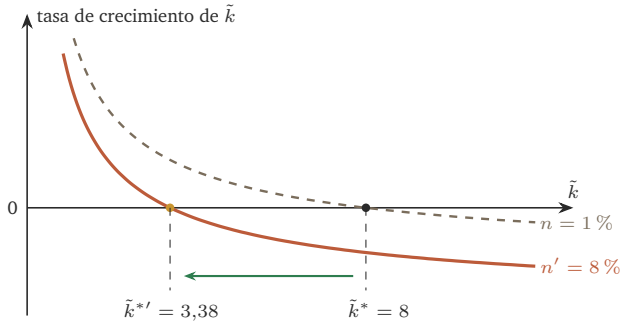
$Y_t = K_t^{\alpha}(E_t L_t)^{1-\alpha}$ con $\alpha = \frac{1}{3}$, $s = 0{,}36$, $\bar{\delta} = 0{,}04$ y $g = 0{,}04$. La economía está en estado estacionario con $n = 0{,}01$ y la población pasa a crecer para siempre a la tasa $n' = 0{,}08$. a) Efecto en el diagrama de la tasa de crecimiento. b) $\tilde{k}^*$ antes y después. c) Qué ocurre con $\tilde{y}^*$ y con la producción por trabajador. d) Tasa de crecimiento de largo plazo de la producción por trabajador, y por qué la población cambia el nivel y no la tasa.

1 **Las tres medidas.** $\tilde{y}$, constante. $y_t = E_t\,\tilde{y}$, crece a g. $Y_t = E_t\,L_t\,\tilde{y}$, crece a $n+g$.

2 **Antes.** $\dfrac{0{,}36}{0{,}04+0{,}01+0{,}04} = 4 \qquad \tilde{k}^* = 4^{3/2} = 4\sqrt{4} = \mathbf{8} \qquad \tilde{y}^* = 4^{1/2} = \mathbf{2}$

Comprobación: $0{,}36 \cdot 2 = 0{,}72$ y $0{,}09 \cdot 8 = 0{,}72$.

3 **a) El diagrama.**



Al subir n, el primer término de la tasa baja, porque el capital se reparte entre más trabajadores, y la constante que se resta sube. La curva se desplaza hacia abajo y $\tilde{k}^*$ cae.

4 **b) y c) Después.**

$$\frac{0{,}36}{0{,}04+0{,}08+0{,}04} = 2{,}25$$

$$\tilde{k}^{*\prime} = 2{,}25^{3/2} \approx \mathbf{3{,}38} \qquad \tilde{y}^{*\prime} = 2{,}25^{1/2} = \mathbf{1{,}5}$$

$$\frac{\tilde{y}^{*\prime}}{\tilde{y}^*} = \left(\frac{2{,}25}{4}\right)^{1/2} = \mathbf{0{,}75}$$

5 **c) La producción por trabajador.** A largo plazo $\tilde{y}$ es un 25 % menor. La producción por trabajador no salta en el momento del cambio. Crece más despacio durante la transición (un 1,7 % el primer año) y acaba un 25 % por debajo de la senda sin boom demográfico.

6 **d) Las tasas.** y_t crece al **4 %** antes y después, porque $\tilde{y}$ es constante y E_t crece a g. Y_t pasa de crecer al 5 % a crecer al 12 %. Una n mayor obliga a dedicar más ahorro a equipar a los trabajadores nuevos y baja el nivel de $\tilde{k}^*$ y de $\tilde{y}^*$. La tasa de largo plazo solo depende del progreso tecnológico.

GLOSARIO

Eficiencia del trabajo, E_t. Lo que rinde cada trabajador gracias a la tecnología. Crece a la tasa g.

Unidades de eficiencia, $E_t L_t$. Trabajadores ponderados por su eficiencia. Crecen a $n+g$.

Capital por unidad de eficiencia, $\tilde{k}$. $\frac{K}{EL}$. Es constante en el estado estacionario.

Producción por unidad de eficiencia, $\tilde{y}$. $\frac{Y}{EL} = \tilde{k}^{\alpha}$.

Estado estacionario, $\tilde{k}^*$. $\left(\frac{s}{\bar{\delta}+n+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Inversión necesaria. $(\bar{\delta}+n+g)\,\tilde{k}$. La que mantiene constante el capital por unidad de eficiencia.

Senda de crecimiento equilibrado. Situación de largo plazo en la que k_t e y_t crecen a la tasa g.

Progreso tecnológico, g. Tasa de crecimiento de E_t. Es la única fuente de crecimiento de la renta por trabajador a largo plazo.

PTF y eficiencia. $A_t = E_t^{1-\alpha}$, de modo que $g_A = (1-\alpha)\,g$.

Efecto nivel. Cambio permanente en la altura de la senda. Lo producen s, n y $\bar{\delta}$.

Efecto crecimiento. Cambio en la tasa de largo plazo. Solo lo produce g.

Escala logarítmica. En ella una tasa constante se ve como una recta. Dos rectas paralelas crecen a la misma tasa.

Boom demográfico. Aumento permanente de n. Baja $\tilde{k}^*$ y sube la tasa agregada.