CUADERNO PAU · PROBLEMAS NUMÉRICOS

Capítulo 6

El umbral de rentabilidad y producir o comprar



Hoja de método · los dos problemas de costes que han caído en la PAU de Madrid, resueltos como los corrige el tribunal · el gráfico del punto muerto paso a paso · tres variantes nuevas para practicar

Por qué este capítulo. El umbral de rentabilidad es la pregunta de costes más antigua de la PAU y la que mejor se deja preparar: una fórmula de una línea, un gráfico que se dibuja en dos minutos y una frase de interpretación. En 2025-26 el tribunal le dio una vuelta y preguntó lo mismo con otro nombre, producir o comprar, en la pregunta de 3 puntos. Las dos versiones comparten el mismo razonamiento: igualar dos rectas y leer qué pasa a cada lado del corte.

Qué ha pedido exactamente la PAU

Modelo	Lo que pide	Puntos
2021-22 B.6 (fundas)	costes fijos y variable unitario, umbral de rentabilidad, gráfico con las zonas de pérdidas y beneficios, beneficio para 2.000 unidades	2
2025-26 P.4 (DORA)	coste de fabricar frente a comprar un componente, precio máximo aceptable al proveedor, cantidad a partir de la cual conviene cada alternativa	1,5 de 3

Los criterios de corrección de todos los cursos, de 2021-22 a 2025-26, nombran el umbral de rentabilidad como contenido evaluable, aunque algún año no haya caído. Es una pregunta que vuelve.

1. Hoja de método

Los costes y el beneficio en cuatro pasos

1. **Separa los costes fijos de los variables.** Fijo es el que se paga igual se venda mucho o nada (alquiler, nómina fija, amortización, seguro). Variable es el que crece con cada unidad producida (material, energía por unidad, embalaje, comisiones). Suma los fijos del periodo y suma los variables de una unidad.
2. **Escribe el coste total como recta**: $CT = CF + CVu \cdot Q$. Con las fundas de 2021-22, $CT = 7.300 + 8Q$.
3. **Escribe el ingreso total**: $IT = p \cdot Q$. Con un precio de 18 €, $IT = 18Q$.
4. **Beneficio** $= IT - CT$. Donde las dos rectas se cortan el beneficio es cero: ese Q es el umbral. A la izquierda hay pérdidas y a la derecha beneficios.

DEFINICIONES Y FÓRMULAS PARA MEMORIZAR

- **Coste total** $CT = CF + CV = CF + CVu \cdot Q$. **Coste medio o unitario** $= CT/Q$, que baja al repartir los fijos entre más unidades.
- **Ingreso total** $IT = p \cdot Q$. **Beneficio** $B = IT - CT = (p - CVu) \cdot Q - CF$.
- **Margen de contribución unitario** $= p - CVu$: lo que cada unidad vendida aporta para cubrir los costes fijos; cuando los ha cubierto, ese margen es beneficio. Fundas: $18 - 8 = 10$ € por unidad.

- **Umbral de rentabilidad o punto muerto** $Q^* = \dfrac{CF}{p - CVu}$: la cantidad que iguala ingresos y costes totales, con beneficio cero. Fundas: $7.300/10 = 730$ unidades.
- **Umbral en euros** $= Q^* \cdot p$: la cifra de ventas que hay que facturar para no perder. Fundas: $730 \times 18 = 13.140\,€$.
- **Cantidad para un beneficio objetivo** $Q = \dfrac{CF + B}{p - CVu}$. Para ganar 5.000 € con las fundas: $12.300/10 = 1.230$ unidades.
- **Producir o comprar**: fabricar cuesta $CF + CVu \cdot Q$; comprar cuesta $p \cdot Q$. **Cantidad de indiferencia** $Q_i = \dfrac{CF}{p - CVu}$, la misma fórmula del umbral con el precio del proveedor en lugar del precio de venta.

Coste tal como aparece en el enunciado	Tipo
alquiler de la nave o del local, mensual o anual	fijo
amortización de la maquinaria	fijo
sueldos y salarios con nómina fija; seguros; cuota de internet; licencia de software	fijo
coste de material por unidad; coste de energía por unidad; envase o embalaje por unidad	variable
comisión por venta; coste de transporte por pedido; «otros costes variables unitarios»	variable
costes fijos «de personal e infraestructura» de X euros mensuales	fijo (ya sumados)

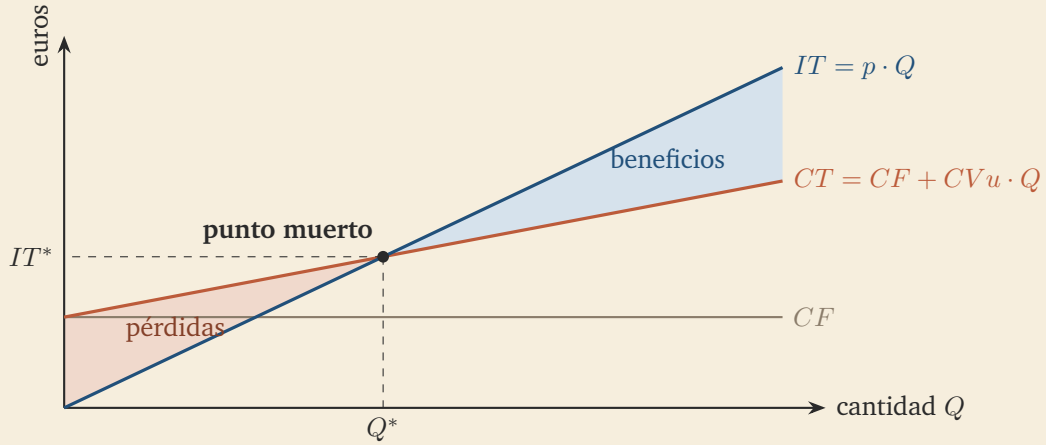


AVISO · LOS CUATRO DESPISTES DEL UMBRAL

El enunciado mezcla costes mensuales y unitarios: suma los fijos **del periodo** y los variables **de una unidad**, y no cruces los dos. La **amortización** es un coste fijo aunque no se pague en efectivo. El resultado del umbral son **unidades**, así que si sale con decimales redondea hacia arriba (con 729,4 unidades todavía se pierde). Y si el precio es menor que el coste variable unitario no hay umbral posible: cada unidad vendida aumenta la pérdida.

El gráfico del umbral, dibujado para el examen

El tribunal da medio punto por el gráfico y lo corrige mirando cinco cosas: los ejes con nombre, la recta de costes fijos horizontal, la recta de costes totales que nace sobre ella, la recta de ingresos que nace en el origen y el punto de corte con su Q^* y las zonas rotuladas.



1. Ejes: cantidad en horizontal, euros en vertical. Marca en el eje vertical el valor de CF y en el horizontal el Q^* que has calculado.
2. Traza CF como una horizontal a la altura de los costes fijos.

3. Traza CT partiendo de ese mismo punto del eje vertical, con pendiente CVu.
4. Traza IT desde el origen, con pendiente p, más inclinada que CT porque $p > CVu$.
5. Señala el corte, baja una línea discontinua hasta Q^* y rotula la zona de pérdidas (entre las rectas, a la izquierda) y la de beneficios (a la derecha).



TRUCO · LA FRASE QUE ACOMPAÑA AL NÚMERO

Tras calcular Q^* escribe siempre: *«La empresa necesita vender [Q^*] unidades al mes para cubrir todos sus costes; con esa cantidad el beneficio es cero, por debajo tiene pérdidas y por encima beneficios. A partir de ahí, cada unidad adicional aporta [$p - CVu$] euros de beneficio»*. La última oración demuestra que entiendes el margen de contribución, y es la que diferencia el 0,5 del 0,25.

Producir o comprar

Una empresa puede fabricar un componente, pagando unos costes fijos propios más un coste variable por unidad, o comprarlo a un proveedor a un precio p por unidad y sin costes fijos. Comprar sale barato cuando se necesitan pocas unidades; fabricar compensa cuando son muchas, porque los fijos se reparten. El método tiene tres movimientos.

1. **Coste de cada alternativa para la cantidad prevista.** Fabricar: $CF + CVu \cdot Q$. Comprar: $p \cdot Q$. Gana la más barata, y hay que decirlo con las dos cifras delante.
2. **Cantidad de indiferencia.** Iguala las dos expresiones y despeja Q: $CF + CVu \cdot Q = p \cdot Q \Rightarrow Q_i = CF/(p - CVu)$. Por debajo de Q_i conviene comprar; por encima, fabricar.
3. **Precio máximo aceptable al proveedor.** Iguala el coste de comprar al de fabricar para la cantidad prevista y despeja el precio: $p_{\max} = (CF + CVu \cdot Q)/Q$, que es el coste medio de fabricar. Por encima de ese precio compensa fabricar.

La variante con dos alternativas de costes. En 2025-26 la opción de comprar también tenía costes fijos, menores, porque la empresa seguía montando el resto del producto. La igualdad se escribe con los dos fijos y los dos variables: $CF_1 + CVu_1 \cdot Q = CF_2 + CVu_2 \cdot Q$, y se despeja $Q_i = (CF_1 - CF_2)/(CVu_2 - CVu_1)$. La lectura es la misma: la alternativa con menos costes fijos gana para cantidades pequeñas.

Pregunta del enunciado	Qué igualas	Qué despejas
¿qué alternativa elegiría para Q unidades?	nada; calculas los dos costes y comparas	la diferencia en euros
¿a partir de cuántas unidades conviene fabricar (o comprar)?	coste de fabricar = coste de comprar, con Q incógnita	la cantidad de indiferencia Q_i
¿qué precio máximo aceptaría del proveedor?	los dos costes con la Q prevista y el precio incógnita	el precio máximo $p_{\max}$



CONEXIÓN · POR QUÉ LAS EMPRESAS EXTERNALIZAN

La cantidad de indiferencia explica la subcontratación u *outsourcing*: una empresa pequeña que vende pocas unidades no llega a repartir los costes fijos de una fábrica de motores, así que compra; cuando crece y supera Q_i, fabricar le sale más barato y además controla la calidad y los plazos. Comprar convierte un coste fijo en variable y deja a la empresa más ligera para cambiar de producto, que es el argumento que el tribunal valora cuando pide «justifique». En el capítulo 5 vimos la otra cara: producir más con los mismos factores sube la productividad y rebaja el coste medio.

2. Los dos problemas de la PAU, resueltos

Los enunciados son literales. La solución sigue el orden de la pregunta y escribe las fórmulas antes de los números, que es lo que exige la solución oficial.

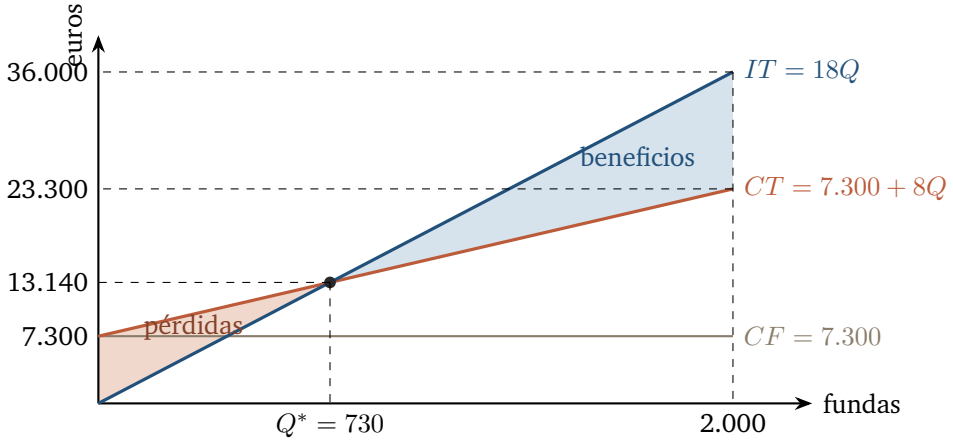
EJERCICIO 1 · PAU Madrid 2021-22, B.6 · fundas para dispositivos electrónicos · 2 puntos

Una empresa se propone producir y vender fundas para dispositivos electrónicos. Para elaborar su plan de negocio, estudia los siguientes costes en que debería incurrir mensualmente: alquiler de una nueva nave 1.500 euros, amortización de la maquinaria 1.300 euros, sueldos y salarios (nómina fija de los trabajadores) 4.500 euros, coste de material por unidad 3 euros, coste de energía por unidad 3 euros, otros costes variables unitarios 2 euros. Teniendo en cuenta la información anterior, se pide: a) determine los costes fijos de la empresa para un mes (0,25 puntos), los costes variables unitarios para un mes (0,25 puntos) y el punto muerto o umbral de rentabilidad, si el precio de venta fuera de 18 euros la unidad (0,5 puntos); b) represente gráficamente el umbral de rentabilidad o punto muerto de la empresa indicando las zonas de beneficios y pérdidas (0,5 puntos); c) si la empresa vendiera 2.000 unidades en ese mes, calcule el beneficio que obtendría en ese periodo (0,5 puntos).

a) Costes fijos mensuales $CF = 1.500 + 1.300 + 4.500 = \mathbf{7.300}$ **€**. Son los que no dependen de cuántas fundas se fabriquen; la amortización entra aunque no suponga un pago.
Coste variable unitario $CVu = 3 + 3 + 2 = \mathbf{8}$ **€** por funda.
Umbral de rentabilidad. Es la cantidad que iguala los ingresos totales con los costes totales, con beneficio cero:

$$IT = CT \;\Rightarrow\; p \cdot Q = CF + CVu \cdot Q \;\Rightarrow\; Q^* = \frac{CF}{p - CVu} = \frac{7.300}{18 - 8} = \mathbf{730} \text{ fundas al mes.}$$

Por debajo de 730 fundas la empresa pierde; por encima gana, y cada funda adicional aporta $18 - 8 = 10$ **€** de beneficio. En euros, el umbral son $730 \times 18 = 13.140$ **€** de ventas mensuales.
b) Representación gráfica.



La recta de ingresos parte del origen con pendiente 18; la de costes totales parte de 7.300 con pendiente 8. Se cortan en 730 fundas y 13.140 **€**. A la izquierda del corte los costes están por encima de los ingresos (zona de pérdidas) y a la derecha por debajo (zona de beneficios).
c) Beneficio con 2.000 fundas. $B = IT - CT = p \cdot Q - (CF + CVu \cdot Q) = 18 \times 2.000 - (7.300 + 8 \times 2.000) = 36.000 - 23.300 = \mathbf{12.700}$ **€** al mes. Comprobación con el margen: $(2.000 - 730) \times 10 = 12.700$ **€**.

EJERCICIO 2 · PAU Madrid 2025-26, pregunta 4 · DORA · apartados a) y b), 1,5 puntos

La empresa «DORA» está analizando el lanzamiento de un nuevo robot de limpieza denominado «DORA LA ASPIRADORA». Según el estudio realizado por la empresa «DORA», como primera alternativa para la fabricación de cada robot se requiere de un motor con un coste unitario de 30 euros. El resto de piezas del robot tiene en su conjunto un coste unitario de 55 euros. Además, va a requerir unos costes fijos de personal e infraestructura de 60.000 euros mensuales. Por otra parte, tiene como segunda alternativa encargar la fabricación de los motores a un proveedor internacional a un coste unitario de 42 euros; esta opción le permitirá a «DORA» reducir los costes fijos en un 50 % y mantener el coste unitario del resto de piezas. La estimación de ventas mensual es de 1.500 robots. Teniendo en cuenta la información anterior, se pide: a) calcule los costes de la primera y la segunda alternativa y justifique qué alternativa elegiría (0,5 puntos); calcule cuál es el precio máximo del motor que la empresa «DORA» estaría dispuesta a aceptar del proveedor internacional para que esa alternativa fuese mejor (0,5 puntos); b) en la situación inicial de 42 euros/motor por parte del proveedor, explique a partir de qué número de unidades vendidas le conviene a la empresa DORA optar por la alternativa de comprar al proveedor (0,5 puntos). *[El apartado c), a elegir entre fuentes de financiación ajena o el VAN de una inversión, se resuelve en el capítulo 3.]*

a) Coste de cada alternativa para 1.500 robots al mes.
Alternativa 1, fabricar el motor: $CT_1 = CF_1 + CVu_1 \cdot Q = 60.000 + (30 + 55) \times 1.500 = 60.000 + 127.500 = \mathbf{187.500}$ €.
Alternativa 2, comprar el motor: los costes fijos se reducen a la mitad (30.000 €) y el coste variable unitario pasa a $42 + 55 = 97$ €. $CT_2 = 30.000 + 97 \times 1.500 = 30.000 + 145.500 = \mathbf{175.500}$ €.
Conviene la **alternativa 2, comprar el motor** al proveedor internacional: ahorra $187.500 - 175.500 = 12.000$ € al mes.
Precio máximo del motor. Es el precio p_m que iguala los costes de las dos alternativas para 1.500 robots:

$$\begin{aligned} 60.000 + (30 + 55) \times 1.500 &= 30.000 + (p_m + 55) \times 1.500 \\ 187.500 &= 112.500 + 1.500\, p_m \\ p_m &= \frac{187.500 - 112.500}{1.500} = \mathbf{50}\ \text{€/motor.} \end{aligned}$$

A DORA le conviene comprar mientras el proveedor cobre menos de 50 € por motor; por encima de ese precio sale más barato fabricarlo.
b) Cantidad a partir de la cual conviene cada alternativa. Se igualan los costes con la cantidad q como incógnita:

$$60.000 + 85\, q = 30.000 + 97\, q \;\Rightarrow\; 30.000 = 12\, q \;\Rightarrow\; q = \mathbf{2.500}\ \text{robots al mes.}$$

Con 2.500 robots las dos alternativas cuestan lo mismo, 272.500 €. Por debajo de 2.500 unidades conviene comprar el motor al proveedor, porque los 30.000 € de costes fijos que se ahorran pesan más que los 12 € extra por motor; por encima de 2.500 conviene fabricarlo. Con la previsión de 1.500 robots, DORA está en la zona de comprar, como salió en el apartado a).

Criterios de corrección que se repiten

- La solución oficial escribe primero la **fórmula literal** ($Q = CF/(p - CVMe)$; $IT = CT$) y después la sustitución. Copia ese orden.

- Tras el umbral se espera una **definición en una línea**: «nivel de ventas para el que el beneficio es cero».
- El gráfico puntúa si tiene **las tres rectas, el corte y las dos zonas rotuladas**; no hace falta que esté a escala exacta.
- En producir o comprar hay que dar **los dos costes en euros** y concluir con la palabra «conviene»; la cantidad de indiferencia se interpreta diciendo qué pasa a cada lado.

Errores que hacen perder puntos

- Sumar un coste unitario a los costes fijos del mes, o al revés.
- Dejar fuera la amortización de los costes fijos «porque no se paga».
- Dar el umbral sin unidad (730 ¿qué?) o sin la frase de interpretación.
- Dibujar CT saliendo del origen, o IT menos inclinada que CT.
- En producir o comprar, olvidar que los costes fijos cambian entre alternativas (en DORA, de 60.000 a 30.000).

3. Variantes para practicar

Tres ejercicios nuevos con el mismo molde. Las soluciones están al final del capítulo; resuélvelos antes de mirarlas y dibuja el gráfico aunque no lo pidan: es el mejor repaso.

VARIANTE 1 · TOSTA, S.L. · tostadoras de diseño · 2 puntos

TOSTA, S.L. fabrica tostadoras de diseño en un pequeño taller. Sus costes anuales son: alquiler del taller, 9.600 €; sueldo fijo de la encargada, 12.000 €; amortización de la maquinaria, 1.800 €; seguro, 600 €; componentes y chapa por tostadora, 11 €; embalaje y envío por tostadora, 4 €. Vende cada tostadora a 35 €. Se pide: a) calcule los costes fijos anuales y el coste variable unitario (0,5 puntos); b) calcule el umbral de rentabilidad en unidades y en euros e interprételo (0,75 puntos); c) calcule el beneficio si vende 1.800 tostadoras en el año (0,25 puntos); d) calcule cuántas tostadoras debería vender para obtener un beneficio anual de 10.000 € (0,5 puntos).

VARIANTE 2 · BRUMA · cafetería de especialidad · 2 puntos

BRUMA es una cafetería que vende cafés de especialidad a 5 € la taza. Cada mes paga 3.000 € de alquiler, 5.000 € de sueldos fijos y 1.000 € de amortización de la máquina y el mobiliario. Cada café le cuesta 2,50 € en grano, leche, vaso y energía. Prevé vender 4.000 cafés al mes. Se pide: a) calcule el umbral de rentabilidad en tazas y en euros, y el beneficio previsto con 4.000 cafés (0,75 puntos); b) el propietario del local anuncia una subida del alquiler de 1.200 € mensuales; calcule el nuevo umbral y el nuevo beneficio previsto, e indique si la cafetería sigue siendo rentable (0,75 puntos); c) explique, sin necesidad de dibujarlo, cómo cambia el gráfico del umbral con la subida del alquiler y qué podría hacer BRUMA para volver al umbral anterior (0,5 puntos).

VARIANTE 3 · NIDO, S.A. · muebles de madera · 1,5 puntos

NIDO, S.A. fabrica mesas y necesita patas torneadas. Puede fabricarlas en su taller con unos costes fijos anuales de 18.000 € (torno, operario y espacio) y un coste variable de 6 € por pata, o comprarlas a un proveedor a 15 € la pata sin ningún coste fijo. Se pide: a) calcule la cantidad de patas para la que es indiferente fabricar o comprar y explique qué conviene a cada lado de esa cantidad (0,5 puntos); b) calcule el coste de cada alternativa si NIDO necesita 1.500 patas al año y decida; repita el cálculo para 3.000 patas (0,5 puntos); c) para 1.500 patas al año, calcule el precio máximo por pata que NIDO aceptaría del proveedor (0,5 puntos).

4. Soluciones de las variantes

Variante 1 · TOSTA, S.L.

a) $CF = 9.600 + 12.000 + 1.800 + 600 = \mathbf{24.000}$ € al año. $CVu = 11 + 4 = \mathbf{15}$ € por tostadora.
b) $Q^* = CF/(p - CVu) = 24.000/(35 - 15) = 24.000/20 = \mathbf{1.200}$ tostadoras al año. Umbral en euros $= 1.200 \times 35 = \mathbf{42.000}$ € de ventas. TOSTA necesita vender 1.200 tostadoras (facturar 42.000 €) para cubrir todos sus costes; con esa cantidad el beneficio es cero, por debajo pierde y por encima gana 20 € por cada tostadora adicional.
c) $B = 35 \times 1.800 - (24.000 + 15 \times 1.800) = 63.000 - 51.000 = \mathbf{12.000}$ €. Comprobación: $(1.800 - 1.200) \times 20 = 12.000$.
d) $Q = (CF + B)/(p - CVu) = (24.000 + 10.000)/20 = \mathbf{1.700}$ tostadoras. Con 1.700 unidades cubre los 24.000 € de fijos y acumula 10.000 € de margen por encima del umbral.

Variante 2 · BRUMA

a) $CF = 3.000 + 5.000 + 1.000 = 9.000$ € al mes; $CVu = 2{,}50$ €; margen de contribución $= 5 - 2{,}50 = 2{,}50$ € por café. $Q^* = 9.000/2{,}50 = \mathbf{3.600}$ cafés al mes, que en euros son $3.600 \times 5 = \mathbf{18.000}$ €. Beneficio previsto con 4.000 cafés: $B = 5 \times 4.000 - (9.000 + 2{,}50 \times 4.000) = 20.000 - 19.000 = \mathbf{1.000}$ € al mes. La cafetería está 400 cafés por encima del umbral.
b) Nuevos costes fijos $CF' = 9.000 + 1.200 = 10.200$ €. Nuevo umbral $Q^{*\prime} = 10.200/2{,}50 = \mathbf{4.080}$ cafés (20.400 €). Nuevo beneficio con 4.000 cafés: $B' = 20.000 - (10.200 + 10.000) = \mathbf{-200}$ €: **pérdida** de 200 € al mes. La subida del alquiler desplaza el umbral 480 cafés hacia la derecha y deja las ventas previstas por debajo de él; con la previsión actual, BRUMA deja de ser rentable.
c) En el gráfico, la recta de costes fijos sube de 9.000 a 10.200 y la recta de costes totales se desplaza hacia arriba en paralelo (misma pendiente, 2,50, porque el coste variable no cambia). La recta de ingresos no se mueve, así que el corte se produce más a la derecha: el umbral pasa de 3.600 a 4.080 cafés y la zona de pérdidas se ensancha. Para volver a un umbral de 3.600 cafés, BRUMA tendría que subir el margen por café a $10.200/3.600 = 2{,}83$ €, lo que supone subir el precio a unos 5,33 € o rebajar el coste variable unitario en 33 céntimos (negociar el grano o el vaso); también puede recortar otros costes fijos en 1.200 €, por ejemplo reduciendo horas de personal.

Variante 3 · NIDO, S.A.

a) Fabricar cuesta $18.000 + 6Q$; comprar cuesta $15Q$. Igualando: $18.000 + 6Q = 15Q \Rightarrow 18.000 = 9Q \Rightarrow Q_i = \mathbf{2.000}$ patas al año. Con 2.000 patas las dos opciones cuestan 30.000 €. Por debajo de 2.000 patas conviene comprar, porque los 18.000 € de costes fijos del taller no se reparten entre suficientes unidades; por encima conviene fabricar, porque cada pata propia ahorra 9 € frente al proveedor.
b) Con 1.500 patas: fabricar $= 18.000 + 6 \times 1.500 = \mathbf{27.000}$ €; comprar $= 15 \times 1.500 = \mathbf{22.500}$ €. Conviene **comprar** y ahorrar 4.500 €. Con 3.000 patas: fabricar $= 18.000 + 18.000 = \mathbf{36.000}$ €; comprar $= 45.000$ €. Conviene **fabricar** y ahorrar 9.000 €. Las dos cantidades caen a un lado y otro de la indiferencia calculada en a).
c) El precio máximo iguala el coste de comprar con el de fabricar 1.500 patas: $p_{\max} \times 1.500 = 27.000 \Rightarrow p_{\max} = \mathbf{18}$ € por pata, que es el coste medio de fabricarlas $(27.000/1.500)$. Mientras el proveedor cobre menos de 18 €, comprar sigue siendo la opción barata; a 15 € NIDO tiene 3 € de margen por pata antes de que le compense montar el torno.



PARA EL EXAMEN · LO QUE TE LLEVAS DE ESTE CAPÍTULO

Todo el capítulo es una sola idea: dos rectas que se cortan. En el umbral se cortan ingresos y costes, y en producir o comprar se cortan los costes de dos alternativas. Separa fijos de variables, escribe cada recta con su fórmula, iguala, despeja y di qué pasa a cada lado del corte. El gráfico es medio punto casi regalado si las tres rectas nacen donde deben. Capítulo siguiente, y último: el periodo medio de maduración, el tiempo que tarda en volver cada euro que la empresa pone en marcha.